LØSNINGSSKISSE
EKSAMEN SIF4029,
6 mai 2002.

OPPGAVE 1.

a) $$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a^2}{18\varepsilon_0}\left[1 - 3(r/a)^2 + 2(r/a)^3\right] & \text{for } 0 \le r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Vi har at $\vec{E} = -\nabla V$

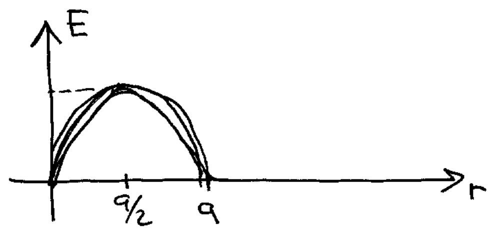
Siden vi har sfærisk symmetri, er $\vec{E}(r) = E_r(r)\,\hat{e}_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\cdot \hat{e}_r$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\rho_0 a}{18\varepsilon_0}\left[-6\cdot\frac{r}{a}\cdot\frac{1}{a} + 6\left(\frac{r}{a}\right)^2\cdot\frac{1}{a}\right] \qquad r \le a$$

$$\vec{E}(r) \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r}{a}\right)\hat{e}_r & r \le a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

$\frac{r}{a} \sim x \quad E \propto x\cdot(1-x)$

Skisse av $E(r)$:



$E(r)$ kontinuerlig?

$$\lim_{r\to a} |\vec{E}(r)| = \frac{\rho a}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a}{a} - \left(\frac{a}{a}\right)^2\right) = 0$$

$r > a \quad \lim_{r\to a} |\vec{E}(r)| = 0$ Ja, feltet er kontinuerlig.

b) Ladningsfordelingen $\rho(r)$ kan vi finne på to måter; den enkleste er kanskje å bruke Gauss' lov på diff-form: Må da bruke kulekoordinater.

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) = \rho(r)$$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$; her er $\varepsilon = \varepsilon_0$; og vi får:

$$\underline{\underline{\rho(r)}} = \varepsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) = \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) = \frac{\varepsilon_0}{r^2} \cdot \frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^3}{a} - \frac{r^4}{a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\rho_0 a}{3} \cdot \left(3\frac{r^2}{a} - 4\frac{r^3}{a^2}\right)$$

$$= \frac{\rho_0 a \cancel{3 r^2}}{\cancel{r^2 3 a}} - \frac{\rho_0 a \cdot 4 r^3}{r^2 3 \; a^2} = \underline{\underline{\rho_0\left(1 - \frac{4}{3}\frac{r}{a}\right)}}$$

Alternativ – mer regning – er Gauss lov på integralform;

$\int \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0}$, sfærisk symmetri; E_r konstant på ei sfærisk Gaussflate:

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(r) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{r=0}^{r} \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$\frac{\rho_0 a}{3 \cancel{\varepsilon_0}} \left(\frac{r}{a} - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \cancel{4\pi} r^2 = \frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}} \cdot \int \rho(r) \cdot \cancel{4\pi} r^2 dr$$

$$\frac{\rho_0 a}{3}\left(\frac{r^3}{a} - \frac{r^4}{a^2}\right) = \int \rho(r) r^2 dr$$

deriverer begge sider mhp r: $\frac{\rho_0 \cancel{a}}{\cancel{3}}\left[\cancel{3}\frac{r^2}{\cancel{a}} - 4\frac{r^3}{a^2}\right] = \rho(r) \cdot r^2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\rho(r) = \rho_0\left[1 - \frac{4}{3}\left(\frac{r}{a}\right)\right]}}$$

c) Total ladning; $\underline{\underline{Q}} = \int_{r=0}^{a} \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_0 \int_0^a \left(1 - \frac{4}{3}\frac{r}{a}\right) r^2 dr$

$$= 4\pi\rho_0 \left[\frac{1}{3} r^3 - \frac{4}{3a} \cdot \frac{1}{4} \cdot r^4\right]_0^a$$

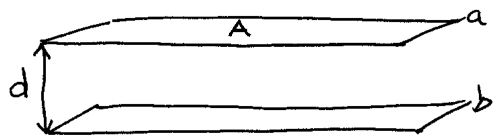
$$= 4\pi\rho_0 \left[\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}a^3\right] = \underline{\underline{0}}$$

Den totale ladningen i fordelinga er null. Dette stemmer med at E-feltet utenfor r = a er lik null. Ifølge Gauss lov kan vi ikke ha total ladning i ladningsfordelinga. Da ville vi hatt $\vec{E} = 0$ utenfor.

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0} \qquad Q_{encl} = 0 \; ; \; \vec{E} = 0.$$

OPPGAVE 2.

a) Skal utlede $C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$, når E-feltet mellom to motsatt ladede, ledende plater er gitt ved $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ når σ er overflateladningen.



Vi har at $C = \frac{Q}{V}$ hvor Q er ladning på platene og V_{ab} er potensialforskjellen mellom platene.

Her har vi at

$Q = \sigma \cdot A$.

Potensialforskjell mellom platene $V_{ab} = E \cdot d$

Dette gir;

$$\underline{\underline{C}} = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\sigma A}{Ed} \underset{E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}{=} \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d} = \underline{\underline{\varepsilon_0 \frac{A}{d}}} = C_0$$

qed.

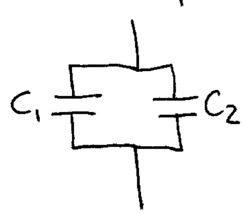
Når vi har et materiale med $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, blir $\underline{\underline{C}} = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$

$\underline{\underline{= \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d}}}$

Numerisk verdi når $A = 120\,cm^2$, $d = 3\,mm$ & $\varepsilon_r = 5{,}0$;

$$\underline{\underline{C}} = 5{,}0 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,F/m \cdot \frac{0{,}012\,m^2}{0{,}003\,m} = 1{,}77 \cdot 10^{-10}\,F = \underline{\underline{177\,pF}}$$

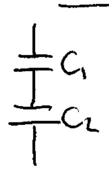
b) Ved parallellkopling av to kondensatorer får vi samme spenning over begge kondensatorene, men de trenger ikke nødvendigvis å ha samme ladning.



$V_1 = V_2 = V_{tot}$, $\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$, $Q_1 + Q_2 = Q_{tot}$

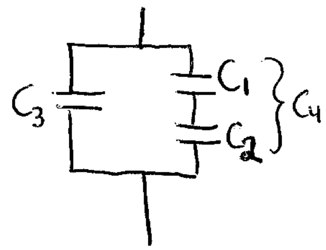
$$\underline{\underline{C_{tot}}} = \frac{Q_{tot}}{V_{tot}} = \frac{Q_1 + Q_2}{V_{tot}} = \frac{Q_1}{V_1} + \frac{Q_2}{V_2} = \underline{\underline{C_1 + C_2}}$$

Ved seriekopling av to kondensatorer har vi samme ladning på de to; men de må tilsammen ha samme potensial (spenning) $V_{tot} = V_1 + V_2$



$$Q_1 = Q_2 = Q_{tot} \Rightarrow \frac{Q_{tot}}{C_{tot}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

c) Vi ønsker nå å doble kapasitansen $C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$
Kapasitansen kan deles opp i tre kapasitanser som vist på figuren:



$$C_3 = \varepsilon_0 \frac{(A-\eta A)}{d} = (1-\eta) C_0$$
$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{\eta A}{\frac{1}{3}d} = 3\eta C_0$$
$$C_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot \frac{\eta A}{2/3 d} = \frac{3}{2}\varepsilon_r \eta C_0$$

Seriekopling av C_1 og C_2 gir:

$$C_4 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{3\eta C_0} + \frac{1}{3/2\,\varepsilon_r \eta C_0}\right)^{-1} = \left(\left(\frac{1}{3C_0\eta}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{\varepsilon_r}\right)\right)^{-1}$$
$$= \left(\frac{1}{3C_0\eta} \cdot \frac{\varepsilon_r + 2}{\varepsilon_r}\right)^{-1} = \frac{3\varepsilon_r C_0 \eta}{\varepsilon_r + 2}$$

Parallellkopling av C_3 og C_4 gir nå:

$$C_{tot} = (1-\eta)C_0 + \frac{3\varepsilon_r C_0 \eta}{\varepsilon_r + 2} = C_0\left(\frac{(1-\eta)(\varepsilon_r+2) + 3\varepsilon_r \eta}{\varepsilon_r + 2}\right)$$
$$= C_0\left(\frac{\varepsilon_r + 2 - \varepsilon_r\eta - 2\eta + 3\varepsilon_r\eta}{\varepsilon_r + 2}\right) = C_0\left(\frac{\varepsilon_r + 2 - 2\eta + 2\varepsilon_r\eta}{\varepsilon_r + 2}\right)$$

sette inn $\varepsilon_r = 5$
$$= C_0\left(\frac{5+2-2\eta+10\eta}{7}\right) = C_0\left(\frac{7+8\eta}{7}\right) = \left(1 + \frac{8}{7}\eta\right)C_0$$

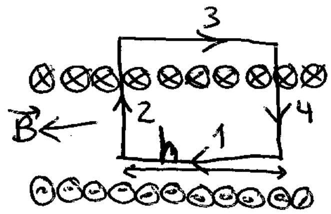
Dette skal bli $2C_0$:

$$2\cancel{C_0} = \left(1 + \frac{8}{7}\eta\right)\cancel{C_0}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{\eta = \frac{7}{8}}}$$

d) For en gitt spenning V over kondensatorene har vi i a)
$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$, $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} = 5C_0$ og i c) $C = 2C_0$
Siden lagret energi f.eks. er gitt ved $U = \frac{1}{2}CV^2$ vil vi få lagret minst energi i den luftfylte, mest energi i den med et dielektrikum overalt mellom platene (5 ganger så mye) og 2 ganger så mye med platen delvis inne (konfigurasjonen i c))

OPPGAVE 3

a) Vi har en lang rett solenoide, lengde l, tverrsnitt A, strøm I. Bruker Amperes lov:



lager en tenkt sløyfe som på fig. med lengde h. ← $\sqrt{A} \ll l$
Uendelig lang spole; utenfor spolen vil magnetfeltet være null, og innenfor homogent og rettet langs spolen, som vist på fig.

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{encl}$$

Bare lengde 1 gir bidrag; da $d\vec{l} \perp \vec{B}$ eller $\vec{B}=0$ for 2, 3 og 4.

$$B \cdot h = \mu_0 \underbrace{I \cdot nh}_{\text{n·h er antall viklinger innenfor!}} \Longrightarrow \underline{\underline{B = \mu_0 n I}} \text{ qed.}$$

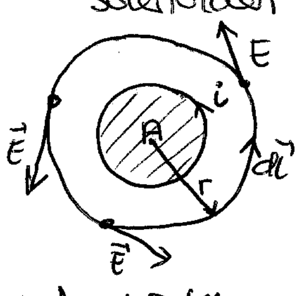
Spolens selvinduktans er gitt ved

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}, \text{ Trenger magnetisk fluks; } N\Phi_B = \underbrace{N}_{nl} \cdot \oint \vec{B} d\vec{A} =$$

$$\underline{nl \cdot A \cdot B} = n \cdot l A \cdot \mu_0 n I = n^2 l A \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L}} = \frac{n^2 l A \mu_0 I}{I} = \underline{\underline{n^2 l A \mu_0}}$$

b) Denne var lik oppg. 3 på øving 8.
Fluks innenfor enhver integrasjonssløyfe utenfor solenoiden vil bli den samme som innenfor A.



Indusert E-felt endre retning når i endre retning.

Det induserte elektriske feltet er tangent til sirkelen. Sylindersymmetri gir at det er like stort på en sirkel med radius r. (sylindersymmetri kunne også gitt radiell komponent, men iflg. Gauss lov går ikke dette, da vi ikke har noen ladning.)

Magnetisk fluks gjennom sløyfa; $\Phi_B = \int \vec{B} d\vec{A} = B \cdot A \overset{B \text{ fra a)}}{=} \mu_r \mu_0 n i A$

Faradays lov: $\oint \vec{E}\,d\vec{l} = \mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{dt} = -\mu_r\mu_0 n\cdot A\cdot \frac{di}{dt}$

$\vec{E} = E_\varphi \hat{e}_\varphi$ og $\vec{E} \parallel d\vec{l}$. E_φ er konstant i avstand r.

$$\oint \vec{E}\,d\vec{l} = E_\varphi \cdot \oint dl = E_\varphi \cdot 2\pi r$$

$$E_\varphi(r) = -\frac{\mu_r\mu_0 n\cdot A\cdot}{2\pi r}\frac{di}{dt} \qquad i = I_0\cdot\cos\omega t,\ \frac{di}{dt} = -I_0\omega\sin\omega t$$

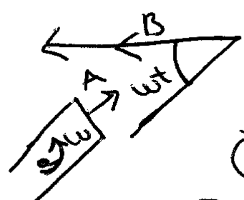
$$\underline{\underline{E_\varphi(r) = +\frac{\mu_r\mu_0 n A}{2\pi r}\cdot I_0\omega\sin\omega t}}$$

Amplituden i avstand 5cm; $\omega = 2\pi\cdot 50\,s^{-1}$

$$\underline{\underline{E_\varphi(0{,}05m)}} = \frac{\mu_r\mu_0 n A I_0\omega}{2\pi\, 0{,}05m} = \frac{2000\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}\cdot 30\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}m^2\cdot 2A\cdot 2\pi\cdot 50\,s^{-1}}{2\pi\cdot 0{,}05m}$$

$$\underline{\underline{= 2{,}26\ V/m}}$$

c) fig i oppg. tekst. Solenoiden roterer i jordmagnetfeltet. Fluksen endrer seg fordi arealet som B-feltet går gjennom varierer som rotasjonen. rotasjons-vinkelfrekvens $\omega = 600\,s^{-1}$; gir at fluksen gjennom hver vinding



blir: $\Phi_B = \int \vec{B}\,d\vec{A} = B\cdot A\cdot\cos\omega t$

Slik at total fluks blir

$$\Phi_{tot} = N\cdot\Phi_B = n\cdot l\cdot B\cdot A\cdot\cos\omega t$$

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}} = -\frac{d\Phi_{tot}}{dt} = \underline{\underline{n\cdot l\cdot B\cdot A\cdot\sin\omega t\cdot\omega}} = \underbrace{n\cdot l\cdot B\cdot A\cdot\omega}_{\mathcal{E}_m}\sin\omega t$$

Setter inn tall; $\underline{\underline{\mathcal{E}_m}} = 30(10^{-2})^{-1}m^{-1}\cdot 600\,s^{-1}\cdot 0{,}2\,m\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}m^2\cdot 0{,}5\cdot 10^{-4}T = \underline{\underline{2{,}7\,mV}}$

OPPGAVE 4

A1. d) fordi $R = \frac{\rho L}{A}$, jo større tverrsnitt, jo mindre motstand og mer strøm for en gitt spenning

A2. c) Bølgelengde endrer seg $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$
frekvensen endrer seg ikke $f = v/\lambda$
hastighet endrer seg $v = c/n$
retning endrer seg $\Rightarrow$ c)

A3. a) Spalten reduseres $\rightarrow$ intensiteten blir bredere!

B1. d) 60W 50% = 30W
2 m unna $A = 4\pi(2m)^2 = 50{,}26 m^2$
$30W / 50{,}26 m^2 = 0{,}597 \approx \underline{0{,}60}$

B2. e) $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ $\vec{v} \parallel \vec{B}$; ingen kraft!

B3. e) $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$, $s' = 30$ $m = -\frac{s'}{s} = +\frac{30}{15} = 2$

$2 \cdot 5 = \underline{\underline{10 cm}}$

C1 c) Totalrefleksjon
$\sin\Theta_b n_b = \sin\Theta_a n_a$ $\sin\Theta_b = \frac{1}{1{,}33}$ $\Theta_B = 48{,}75°$
$\tan 48{,}75° = \frac{R}{1} \Rightarrow \underline{\underline{R = 1{,}14}}$

C2 b) Når kulene berører hverandre får de samme potensiale.
$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$ $q_1 + q_2 = 25 nC$
to likninger; to ukjente
$\Rightarrow \underline{\underline{q_2 = 9{,}4.}}$
ladning vil ikke fordele seg jevnt på overflata ved berøringspunktet!

C3. a) $\lambda = 4m$, $T = 1/2 s$ $\Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = 8{,}0 m/s$

Fag SIF4029
Eksamen 6. mai 2002

STUDENTNR:____________.
STUDIEPROGRAM:________.

SVAR-ARK FOR OPPGAVE 4

Sett ett kryss for hver oppgave (gardering ikke tillatt)

	Svar-alternativer				
Oppgave	a	b	c	d	e
A1				X	
A2			X		
A3	X				
B1				X	
B2					X
B3					X
C1			X		
C2		X			
C3	X				

Dette arket leveres sammen med resten av eksamensbesvarelsen.