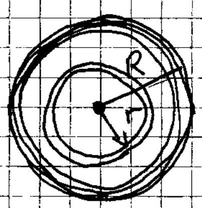
LØSNINGSSKISSE
EKSAMEN SIF 4029
mandag 5 mai 2003

OPPGAVE 1

a) Vi har gitt $\rho(r)$ og skal finne $\lambda(r)$.
Må da integrere opp over sylinderens tverrsnitt-areal.



Sylindersymmetri; siden ρ kun er avhengig av r.

$$\underline{\underline{\lambda(r)}} = \int \rho(r)\,dA = \int_0^r \frac{2\lambda_0}{\pi R^2}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)2\pi r\,dr$$

$$= \frac{2\lambda_0}{\pi R^2}\,2\pi\left[\int_0^r r\,dr - \int_0^r \frac{r^3}{R^2}\,dr\right]$$

$$= \frac{4\lambda_0}{R^2}\left[\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4R^2}r^4\right]$$

$$= \underline{\underline{\lambda_0\left[2\frac{r^2}{R^2} - \frac{r^4}{R^4}\right]}}$$

Ser at $\lambda(r) = \lambda_0$ for $r = R$; stemmer!

Skal bestemme $\vec{E}(r)$ for alle r:

Sylindersymmetri med $\lambda(r) = \lambda_0\left[2\frac{r^2}{R^2} - \frac{r^4}{R^4}\right]$

Gauss lov; $\oint \vec{E}\,d\vec{A} = \frac{Q_{encl}}{\varepsilon_0}$. Velger en sylinder med lengde l og radius r til Gaussflate.
$\vec{E}(r)$ er konstant på sylinderflata og kan settes utenfor.

② Ikke bidrag fra sideflatene; $\vec{E}(r) \parallel d\vec{A}$ på sylinderflata

Ser først på $\underline{r > R}$: $\quad Q_{encl} = \lambda_0 \cdot L \qquad \oint \vec{E}\, d\vec{A} = \int E\, dA = E\, A$

$$E(r)\cdot \underbrace{2\pi r \cdot L}_{\int dA = A} = \frac{\lambda_0 L}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda_0}{\varepsilon_0 2\pi r}\,\hat{e}_r$$

$\underline{r < R}$: $\quad Q_{encl} = Q(r) = \lambda(r)\cdot L$

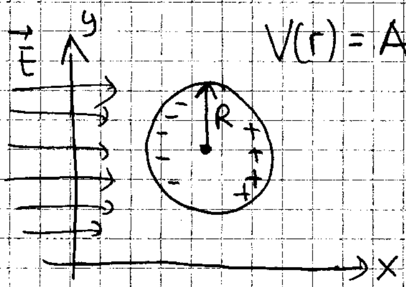
$$E(r)\cdot 2\pi r \cdot L = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot \lambda_0 \left[2\cdot\frac{r^2}{R^2} - \frac{r^4}{R^4} \right]$$

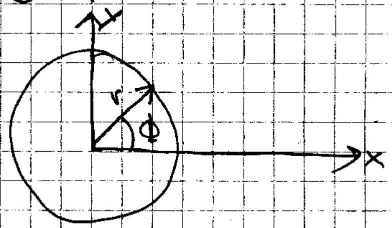
$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\left[2\frac{r}{R^2} - \frac{r^3}{R^4} \right]$$

Ja, feltet er kontinuerlig for $r = R$.

b) $V(r,\phi) = Ax + B\cdot\frac{\cos\phi}{r}$, $\; r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\; x = r\cos\phi$

$$V(r) = Ar\cos\phi + B\frac{\cos\phi}{r}$$





$$\vec{E}(r,\phi) = -\nabla V(r,\phi) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{e}_\phi - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial z}}_{=0}\hat{e}_z$$

$$= \left(-A\cos\phi + B\cdot\cos\phi\cdot\frac{1}{r^2}\right)\hat{e}_r$$

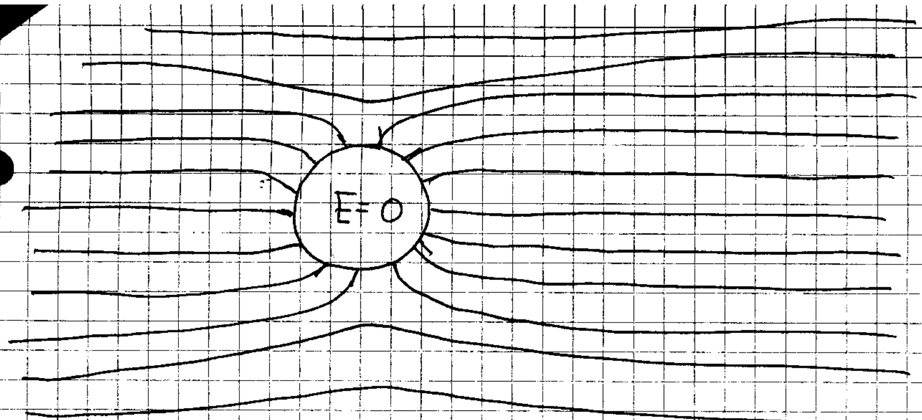
$$\frac{1}{r}\left(Ar\sin\phi + B\frac{\sin\phi}{r}\right)\hat{e}_\phi$$

$$= \left(\frac{B}{r^2} - A\right)\cos\phi\,\hat{e}_r + \left(\frac{B}{r^2} + A\right)\sin\phi\,\hat{e}_\phi$$

(Spesielt for $r \to \infty$ (langt unna;

$$E(\phi) = \cancel{\cos\phi\,\hat{e}_r}\; A\underbrace{\left(-\cos\phi\,\hat{e}_r + \sin\phi\,\hat{e}_\phi\right)}_{-\hat{e}_x}$$

Ok! $= -A\,\hat{e}_x$



På sylinderoverflata er $\vec{E}(r,\phi)$ normalt på flata. Derfor må

ϕ-komponenten i ϕ-retning være 0:

$$E(r,\varphi) = \left(\frac{B}{r^2} - A\right)\cos\phi\,\hat{e}_r + \underbrace{\left(\frac{B}{r^2} + A\right)\sin\phi}_{=0 \text{ for } r=R}\hat{e}_\varphi$$

Dette gir sammenhengen mellom A og B:

$$\frac{B}{R^2} = -A, \quad \underline{A = -\frac{B}{R^2}}$$

Kunne også brukt at lederflata er ei ekvipotensialflate, og at

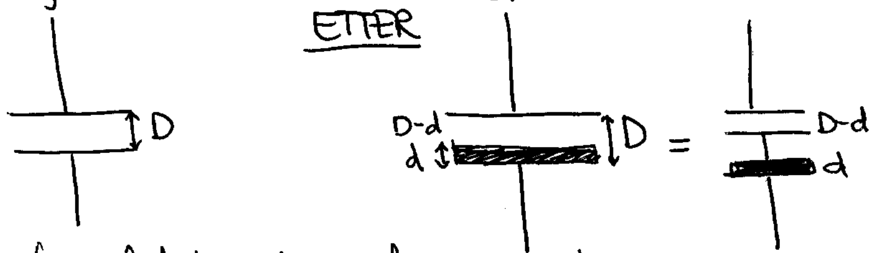
$$V(R,\varphi) = AR\cos\phi + B\frac{\cos\phi}{R}$$
$$= \cos\phi\left(AR + \frac{B}{R}\right)$$ må være

lik for alle ϕ, og at ( ) derfor må være null!

$$AR = -\frac{B}{R} \Rightarrow \underline{\underline{A = -\frac{B}{R^2}}}$$

④ c) Når vi putter inn ei dielektrisk plate får vi en seriekopling av to kondensatorer.

FØR: ETTER



Kapasitans for platekondensator er gitt til $C = \varepsilon \frac{A}{d}$. Seriekopling av to kondensatorer gir

$$\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Vi har i tilfellet „ETTER" at $C_1 = \varepsilon_0 \frac{A}{D-d}$ og $C_2 = \varepsilon \frac{A}{d}$

som gir:

$$\frac{1}{C_{total}} = \frac{\varepsilon(D-d)}{\varepsilon \varepsilon_0 A} + \frac{d\,\varepsilon_0}{\varepsilon A \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon D - \varepsilon d + \varepsilon_0 d}{\varepsilon \varepsilon_0 A}$$

$$\underline{\underline{C_{total}}} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 A}{\varepsilon D - \varepsilon d + \varepsilon_0 d} \underset{\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0}{\uparrow}{=} \frac{\varepsilon_0^2 \varepsilon_r A}{\varepsilon_0(\varepsilon_r D - \varepsilon_r d + d)} = \underline{\underline{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{[d + \varepsilon_r(D-d)]}}}$$

tallverdier:

$A = 300\,cm^2$
$d = 1{,}25\,mm$
$D = 3\,mm$

Løser ut ε_r:

$$C_{tot}[d + \varepsilon_r(D-d)] = \varepsilon_0 \varepsilon_r A$$

$$\varepsilon_r [C_{tot}(D-d) - \varepsilon_0 A] = -C_{tot} d$$

$$\varepsilon_r = \frac{C_{tot} \cdot d}{\varepsilon_0 A - C_{tot}(D-d)}$$

Innsatt –

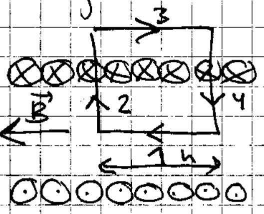
$$\underline{\underline{\varepsilon_r}} = \frac{125{,}4 \cdot 10^{-12}\,F \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-3}\,m}{(8{,}854 \cdot 10^{-12}\,F/m \cdot 300 \cdot 10^{-4}\,m^2 - 125{,}4 \cdot 10^{-12}\,F \cdot 1{,}75 \cdot 10^{-3}\,m)}$$

$$\underline{\underline{= 3{,}395}}$$

OPPGAVE 2

a) Bruker Amperes lov:

Lager en tenkt sløyfe som på fig. med lengde h



Uendelig lang spole ($\sqrt{A} << l$)

$\Rightarrow$ utenfor spolen vil magnetfeltet være null og innenfor homogent retta langs spolen som vist på fig.

$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{end}$

Bare lengde 1 gir bidrag, da $d\vec{l} \perp \vec{B}$ eller $B = 0$ for 2, 3 og 4.

$B \cdot h = \mu_0 I \underbrace{n \cdot h}_{\text{Antall viklinger innenfor sløyfa her!}} \Rightarrow \underline{\underline{B = \mu_0 n I}}$ qed.

Spolens selvinduksjon:

$L = \frac{N \Phi_B}{I}$ Trenger magnetiske fluks; $N\Phi_B = \underbrace{N}_{nl} \oint \vec{B} d\vec{A}$

$= n \cdot l \cdot A \cdot B = n \cdot l \cdot A \cdot \mu_0 n I = n^2 l \cdot A \cdot \mu_0 I$

$L = \frac{n^2 l \cdot A \cdot \mu_0 I}{I} = \underline{\underline{n^2 l \cdot A \cdot \mu_0}}$ Setter inn for B

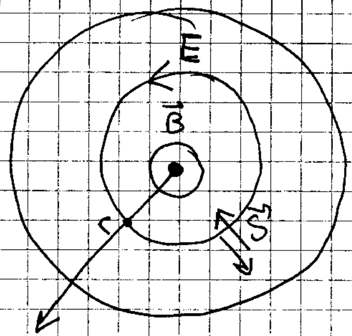
b)

Vi får nå et varierende B-felt; $B = \mu_0 n \cdot I = \mu_0 n I_0 \cdot \cos \omega t$

retning som over; langs aksen.

Vi har sylindersymmetri, og $\vec{E}$-feltet vil være sirkulært. Bruker Faradays lov på en sirkulær sløyfe inni solenoiden.

r<R:



$$\oint \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\,d\vec{A}$$

E er konstant for gitt r.

$\vec{B} \parallel d\vec{A}$; B = konst; $\int dA = A = \pi r^2$

$$E \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \cdot \mu_0 n I_0 \frac{d}{dt}(\cos\omega t)$$

$$2\pi r E = \omega \pi r^2 \mu_0 n I_0 \sin\omega t$$

$$E(r) = \frac{1}{2}\mu_0 n I_0 \omega r \sin\omega t$$

retning langs sirkelen.

$$\underline{\underline{\vec{E}(r) = \frac{\mu_0 n I_0 \omega r}{2}\sin\omega t \cdot \hat{e}_\phi}}$$

Pointingsvektoren $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$

$$= \frac{1}{\mu_0} E \cdot B \cdot \hat{e}_r$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I_0^2 \omega r \cdot \underbrace{\sin\omega t \cdot \cos\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}\,\hat{e}_r$$

$$\vec{S} = \frac{1}{4}\mu_0 n^2 I_0^2 \omega r \sin(2\omega t)\,\hat{e}_r$$

retningen til Pointingsvektor varierer radielt ut og inn, som funksjon av vinkelfrekvensen.

c) (Gjort på øving i øving 9 oppgave 1)

Strømtetthet i innersylinder: $j_i = \frac{I}{\pi R_1^2}$

strømtetthet i yttersylinder: $j_y = \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}$

Amperes lov: $\oint \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_0 I_{encl.}$, Sylindersymmetri; B-felt sirkulært.

r < R₁

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 j_i \pi r^2 = \mu_0 \frac{I\pi r^2}{\pi R_1^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

$\underline{R_1 < r < R_2}$ $\quad B\cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}}$

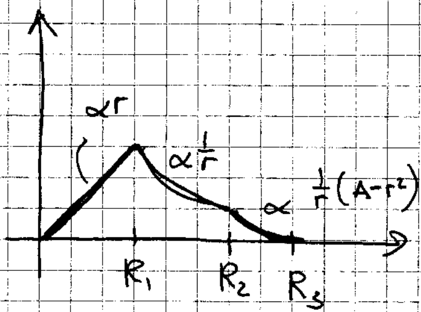
$\underline{R_2 < r < R_3}$ $\quad B\cdot 2\pi r = \mu_0 I - \mu_0 j_y \pi (r^2 - R_2^2) = \mu_0 I - \mu_0 \frac{\pi(r^2-R_2^2)}{\pi(R_3^2-R_2^2)}$

$$\underline{\underline{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\frac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2^2}\right)}}$$

$\underline{r > R_3}$ $\quad B\cdot 2\pi r = \mu_0 (I - I) = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{B=0}}$

Er B kontinuerlig?

For R_3 ; – Ja!
R_2 ; – Ja!
R_1 ; – Ja!



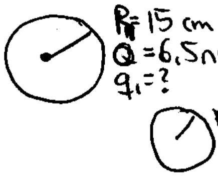
– B ville ikke vært kontinuerlig hvis $\mu \neq \mu_0$.
Vi ville fått magnetisering i metallet.
(H derimot ville vært kontinuerlig!)

OPPGAVE 3.

1) $T = 0{,}2\,s$, $f = \frac{1}{T} = 5\,Hz$ $\Rightarrow$ b)

2) E er null inni; faller som $1/r^2$ utenfor
$\Rightarrow V =$ konst inni og faller som $1/r$ utenfor $\Rightarrow$ b)

3) To ledere i kontakt → potensialet likt $\Rightarrow$ c)

4) 

$R_1 = 15$ cm
$Q = 6{,}5\,nC$
$q_1 = ?$

$R_2 = 10$ cm
$q_2 = ?$

Når kulene berører hverandre får de samme potensiale.

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \qquad q_1 + q_2 = 6{,}5\,nC$$

To likninger - to ukjente;

$$q_2 = 2{,}6\,nC \Rightarrow \text{a)}$$

5) $H = nI = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B$, $B = 2{,}46\,T$, $I = 1{,}0\,A$, $n = 1500\,m^{-1}$

$$\mu_r^{-1} = \frac{nI\mu_0}{B} \Rightarrow \mu_r \approx 1306 \Rightarrow \text{b)}$$

6) Faraday - $\mathcal{E} = -\frac{n\,d\Phi}{dt} = -n\frac{dB}{dt} \cdot A =$
$200 \cdot \frac{3}{5} \cdot 0{,}05 = 6{,}0\,V \Rightarrow$ c)

7) $60\,W$; $50\% \Rightarrow 30\,W$

$$30\,W / 4\pi (2m)^2 = 0{,}5968\,W/m^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_{max}^2$$

$$E_{max} = 21{,}19\,V/m \Rightarrow \text{e)}$$

8) Snells lov; $\sin\theta_a n_a = \sin\theta_b n_b$

$\theta_{b1} = 22{,}1°$
$\theta_{b2} = 29{,}86°$ $\Rightarrow$ b)

9) spalten reduseres → intensiteten blir bredere $\Rightarrow$ d)

10) $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{12}$, $m = \frac{s'}{s} = 3 \Rightarrow$ a)

Fag SIF4029
Eksamen 5. mai 2003

STUDENTNR:_____________.
STUDIEPROGRAM:_________.

SVAR-ARK FOR OPPGAVE 3

Sett ett kryss for hver oppgave (gardering ikke tillatt; ingen minuspoeng for feil svar)

	Svar-alternativer				
Oppgave	a	b	c	d	e
1		X			
2		X			
3			X		
4	X				
5		X			
6			X		
7					X
8		X			
9				X	
10	X				

Dette arket leveres sammen med resten av eksamensbesvarelsen.