NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:

Professor Per Hemmer, tel. 73 59 36 48

EKSAMEN I SIF4045 KVANTEMEKANIKK
EKSAMEN I 74310 KVANTEMEKANIKK 1

Lørdag 11. august 2001
kl. 09.00 – 15.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

En side med uttrykk og formler er vedlagt.

Sensuren faller 1. september 2001.

Oppgave 1

En partikkel med masse m befinner seg i det éndimensjonale harmonisk-oscillator-potensialet $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$. Partikkelens kvantemekaniske tilstand er

$$|\Psi, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle e^{-iE_0 t/\hbar} + |1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar}\right), \tag{1}$$

der t er tiden, og der $|n\rangle$ er den tidsuavhengige energiegenvektoren som tilsvarer energiegenverdien $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.

a) Beregn partikkelens middelposisjon $\langle q\rangle$ som funksjon av tida.

b) Beregn middelverdien $\langle V(q)\rangle$ av partikkelens potensielle energi.

c) Beregn middelverdien $\langle p\rangle$ av impulsen (som funksjon av tida).

d) Det foretas en energimåling når partikkelen er i tilstanden gitt ved likning (1). Hvilke resultater kan en få, og med hvilke sannsynligheter?

Opgave 2

a) Vis at grunntilstandsenergien E_0 for en partikkel med masse m i et éndimensjonalt potensial $V(x)$ aldri er større enn Rayleigh-Ritz-estimatet

$$E_{RR} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^* \widehat{H} f \; dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f^* f \; dx} = \frac{\langle f|\widehat{H}|f\rangle}{\langle f|f\rangle},$$

der $\widehat{H}$ er systemets Hamiltonoperator.

b) Benytt Rayleigh-Ritz variasjonsmetode med prøvefunksjon

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}\tau x^2},$$

der τ er en reell variasjonsparameter, til å beregne grunntilstandsenergien i et fjerde-ordenspotensial best mulig. Partikkelens Hamiltonoperator er

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\widehat{p}_x^2 + g\,x^4,$$

med en kjent konstant g.

Oppgave 3

a) Gi en fysisk definisjon av det differensielle spredningstverrsnittet $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ for spredning av partikler mot et fast spredende potensial $V(\vec{r})$.

b) I Bornapproksimasjonen (første Bornapproksimasjon) er spredningsamplituden gitt som

$$f(\vartheta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int_0^\infty \frac{\sin(qr)}{qr}\, V(r)\; 4\pi r^2\, dr,$$

med $q = 2k\,\sin(\vartheta/2)$.

Beregn i Bornapproksimasjonen det differensielle spredningstverrsnitt for spredning av partikler med energi $E = \hbar^2 k^2/(2m)$ mot potensialet

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{for } r \leq R \\ 0 & \text{for } r > R. \end{cases}$$

c) Når ventes Bornapproksimasjonen å være en god tilnærmelse? (Her ventes bare kort kvalitativ besvarelse.)

Oppgave 4

Spinntilstanden for et elektronspinn har formen

$$\chi = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2}\cos(\alpha/2) \\ e^{i\omega t/2}\sin(\alpha/2) \end{pmatrix},$$

der ω og α er reelle parametre, og t er tiden. Her er brukt standard matriserepresentasjon basert på egentilstandene for S_z.

a) Hva er sannsynligheten $P_\uparrow$ for å finne spinnet "opp" ($S_z = +\hbar/2$) ved tiden t?

b) Beregn middelverdiene av spinnkomponentene $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ og $\langle S_z \rangle$.

c) Beregn lengden av den midlere spinnvektoren $\langle \vec{S} \rangle$. Beskriv ved hjelp av parametrene ω og α hvorledes $\langle \vec{S} \rangle$ varierer med tiden.

Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

Harmonisk oscillator

De to laveste energiegentilstandene har disse energiverdier og posisjonsbølgefunksjoner:

$$\begin{aligned} E_0 &= \tfrac{1}{2}\hbar\omega & \langle q|0\rangle = \psi_0(q) &= \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ E_1 &= \tfrac{3}{2}\hbar\omega & \langle q|1\rangle = \psi_1(q) &= \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} 2xe^{-\frac{1}{2}x^2}, \end{aligned}$$

der $x \equiv q\sqrt{m\omega/\hbar}$.

Uttrykt ved posisjons- og impuls-operatorene er senke- og heveoperatorene (annilasjons- og skapelsesoperatorene) definert ved

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\widehat{q} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\widehat{p} \\ a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\widehat{q} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\widehat{p} \end{aligned}$$

Disse stigeoperatorene har egenskapene

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \end{aligned}$$

der $|n\rangle$ er egentilstand nr. n. All tidsavhengighet er neglisjert.

Spinnoperatorer

Operatoren for spinn-$\frac{1}{2}$ er $\vec{S} = \frac{1}{2}\hbar\,\vec{\sigma}$, med Paulimatrisene gitt ved

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Integraler

$$\int_0^a x\sin x\; dx = \sin a - a\cos a.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\, e^{-ax^2}\; dx = c_n\sqrt{\pi}\; a^{-n-\frac{1}{2}},$$

med

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \tfrac{1}{2}, \quad c_2 = \tfrac{3}{8}$$