NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:

Professor Per Hemmer, tel. 73 59 36 48

EKSAMEN I SIF4045 KVANTEMEKANIKK
EKSAMEN I 74310 KVANTEMEKANIKK 1

Tirsdag 29. mai 2001
kl. 09.00 – 15.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

En side med uttrykk og formler er vedlagt.

Sensuren faller 19. juni 2001.

Oppgave 1

Et elektron befinner seg i et sentralsymmetrisk felt $V(r)$, og vi ser bort fra spinn-bane-kopling. Når et konstant magnetfelt $\vec{\mathcal{B}}$ settes på fås et tilleggsledd

$$H' = \frac{e}{2m_e}\,\vec{\mathcal{B}}\cdot(\vec{L}+2\vec{S}) \tag{1}$$

til elektronets Hamiltonoperator. Symbolene har sin konvensjonelle betydning. Hvor mange nivåer (med ulik energi) splittes et p-nivå ($\ell = 1$) opp i, og hvilke tilleggsenergier gir leddet (1)?

Oppgave 2

a) I Rayleigh-Schrödinger tidsuavhengig perturbasjonsteori løses egenverdiproblemet $\widehat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$, der $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \lambda\widehat{H}_1$, ved rekkeutvikling i parameteren λ:

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^0 + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \ldots \\ |\psi_n\rangle &= |n\rangle + \lambda|n^{(1)}\rangle + \lambda^2|n^{(2)}\rangle + \ldots \end{aligned}$$

Løsningen av det uperturberte problemet, $\widehat{H}_0|n\rangle = E_n^0|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, forutsettes kjent, og det forutsettes at egenverdiene E_n^0 ikke er degenererte.

Vis at til første orden er egenverdiene gitt ved

$$E_n = E_n^0 + \lambda\langle n|\widehat{H}_1|n\rangle + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Til annen orden er egenverdiene gitt ved

$$E_n = E_n^0 + \lambda\langle n|\widehat{H}_1|n\rangle + \lambda^2 \sum_{m(\neq n)} \frac{\left|\langle m|\widehat{H}_1|n\rangle\right|^2}{E_n^0 - E_m^0} + \mathcal{O}(\lambda^3). \tag{2}$$

Likning (2) skal du ikke vise.

b) Bruk heve- og senkeoperatorer $a^\dagger$ og a til å beregne forventningsverdien (middelverdien) $\langle q^2\rangle$ for en partikkel med masse m i grunntilstanden $|0\rangle$ i harmonisk-oscillator-potensialet $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$.

Vis også at

$$\langle 0|q^4|0\rangle = \frac{3\hbar^2}{4m^2\omega^2}.$$

***

I resten av denne oppgaven ser vi på en partikkel med masse m og ladning e som beveger seg på en sirkel i xz-planet med radius R. Sirkelen er $x^2 + z^2 = R^2$ og tyngdekraften virker i negativ z-retning. Partikkelens posisjon q måles langs sirkelen, med origo i det laveste punktet, $x = 0, z = -R$. Den potensielle energien er da

$$V_g = mg(R + z) = mgR\left[1 - \cos(q/R)\right], \tag{3}$$

slik at energifunksjonen blir

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_g,$$

der $p = m\dot{q}$ er den kanoniske impuls som svarer til koordinaten q.

c) Anta at for et sterkt tyngdefelt vil partikkelen befinne seg så nær bunnen av sirkelen at vi vha

$$\cos(q/R) = 1 - \frac{q^2}{2R^2} + \frac{q^4}{24R^4} + \mathcal{O}(q^6) \tag{4}$$

kan utvikle den potensielle energien i potenser av q. Skriv ned den stasjonære Schrödingerlikningen for partikkelens egenfunksjon $\psi(q)$ når vi bare tar med annengradsleddet i denne utviklingen. Hva blir grunntilstandsenergien E_0^0 i denne tilnærmelsen? (Øvre indeks ^{0} er bare satt på fordi dette er nullte ordens tilnærmelse i neste punkt.)

d) Ta så med bidraget til den potensielle energi som leddet $q^4/(24R^4)$ i likning (4) gir, og bruk førsteordens Rayleigh-Schrödinger perturbasjonsteori på denne perturbasjonen for å beregne en bedre verdi for grunntilstandsenergien E_0 enn resultatet $E_0^0 =$ i punkt c).

e) I *fravær* av tyngdefelt er $H = p^2/(2m)$, og den stasjonære Schrödingerlikningen er svært enkel for dette tilfellet. Løs denne. Bruk at q og $q + 2\pi R$ er samme sted på sirkelen til å finne energiegenfunksjonene og til å vise at energinivåene er

$$E_n^0 = \frac{\hbar^2}{2mR^2}\, n^2 \qquad (n \text{ heltallig})$$

i dette grensetilfellet.

f) Når gravitasjonskraften mg er svært svak kan vi, med resultatene i punkt e) som nullte ordens tilnærmelse, bruke perturbasjonsteori med gravitasjonspotensialet V_g som perturbasjon. Beregn grunntilstandsenergien til annen orden i feltet V_g vha formelen (2) i punkt a).

g) Forholdet

$$\tilde{g} = \frac{mgR}{\hbar^2/(2mR^2)}$$

er et forhold mellom to energier, og derfor dimensjonsløst. $\tilde{g}$ kan brukes som et dimensjonsløst mål på styrken av g i vårt system.

Bruk resultatet i punkt f) for svakt gravitasjonsfelt ($\tilde{g} \ll 1$) og resultatet i punkt d) for sterkt gravitasjonfelt ($\tilde{g} \gg 1$) til å skrive den dimensjonsløse grunntilstandsenergien

$$\widetilde{E}_0 = \frac{E_0}{mgR}$$

som funksjon av $\tilde{g}$ i disse grensetilfellene. Bruk dette til å skissere funksjonen $\widetilde{E}_0(\tilde{g})$.

h) Dersom også et elektrisk felt $\mathcal{E}$, rettet langs positiv x-retning, er tilstede, vil den potensielle energien inneholde tilleggsleddet

$$V_e(q) = -e\mathcal{E}x = -e\mathcal{E}R\sin(q/R). \tag{5}$$

For et svært svakt elektrisk felt vil systemets grunntilstandsenergi få en tilleggsenergi tilnærmet av formen

$$\text{konstant} \cdot \mathcal{E}^b.$$

Hva er konstanten b? (Gi en kort begrunnelse for svaret).

i) Energileddet V_e, likning (5), har sin minste verdi for posisjonen $q = \pi R/2$. Innfør avviket fra denne posisjonen,

$$Q = q - \frac{\pi R}{2},$$

som ny koordinat. For små Q er den potensielle energi som skyldes det elektriske feltet av formen

$$V_e = -e\mathcal{E}R\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{Q}{R}\right) = -e\mathcal{E}R\cos(Q/R) \approx -e\mathcal{E}R\left[1 - \frac{Q^2}{2R^2}\right]. \tag{6}$$

Anta at for et sterkt elektrisk felt kan en se bort fra tyngdefeltet og representere den potensielle energien ved å bruke annengradsuttrykket (6). Hva blir isåfall uttrykket for grunntilstandsenergien for sterke elektriske felt?

Oppgave 3

Et system består av to dreieimpulser $\vec{J}_1$ og $\vec{J}_2$ med verdiene j_1 og j_2 for kvantetallet som er knyttet til kvadratet av dreieimpulsen. Systemets totale dreieimpuls er $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Gi uten bevis de mulige verdier av kvantetallet j knyttet til $\vec{J}^2$.

Kvarker og antikvarker er spinn-$\frac{1}{2}$-partikler. Baryoner (som proton eller nøytron) består av 3 kvarker, og mesoner (som pioner eller kaoner) består av en kvark og en antikvark. Hvilke spinnverdier er mulig for baryoner, og for mesoner? (Anta at systemene er i grunntilstanden slik at banedreieimpulsen er null.)

Oppgave 4

a) Gi en fysisk definisjon av det differensielle spredningstverrsnittet $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$.

b) For et kulesymmetrisk potensial $V(r)$ kan spredningsamplituden skrives som en sum av partialbølger,

$$f(\vartheta) = \frac{1}{2ik}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\left(e^{2i\delta_\ell} - 1\right) P_\ell(\cos\vartheta),$$

der P_ℓ er Legendre-polynomer. Argumenter halvklassisk for at for et potensial med en endelig rekkevidde a vil bare ledd med $\ell < ka$ bidra vesentlig til summen ovenfor. Hva kan en derfor slutte om vinkelvariasjonen av spredning på et potensial med endelig rekkevidde når energien er lav, $E \ll \hbar^2/(2ma^2)$?

Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

Harmonisk oscillator

De to laveste energiegentilstandene har disse energiverdier og posisjonsbølgefunksjoner:

$$
\begin{aligned}
E_0 &= \tfrac{1}{2}\hbar\omega \qquad & \langle q|0\rangle = \psi_0(q) &= \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\
E_1 &= \tfrac{3}{2}\hbar\omega \qquad & \langle q|1\rangle = \psi_1(q) &= \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} 2xe^{-\frac{1}{2}x^2},
\end{aligned}
$$

der $x \equiv q\sqrt{m\omega/\hbar}$.

Uttrykt ved posisjons- og impuls-operatorene er senke- og heveoperatorene (annilasjons- og skapelsesoperatorene) definert ved

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\widehat{q} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\widehat{p} \\
a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\widehat{q} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\widehat{p}
\end{aligned}
$$

Disse stigeoperatorene har egenskapene

$$
\begin{aligned}
a|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\
a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle,
\end{aligned}
$$

der $|n\rangle$ er egentilstand nr. n. All tidsavhengighet er neglisjert.

Legendrepolynomer

$$
\begin{aligned}
P_\ell(x) &= \frac{1}{2^\ell \ell!}\,\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2-1\right)^\ell \\
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2} \\
\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_{\ell'}(x)\,dx &= \begin{cases} 0 & \text{for } \ell \neq \ell' \\ 2/(2\ell+1) & \text{for } \ell = \ell' \end{cases}
\end{aligned}
$$