Eksamen 11.08.01 i SIF4045 Kvantemekanikk
Løsningsforslag

Oppgave 1

Vi bruker heve- og senkeoperatorene. Av de oppgitte uttrykkene finner vi

$$\begin{aligned}\widehat{q} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^\dagger)\\ \widehat{p} &= \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}i(a^\dagger-a).\end{aligned}$$

a)

$$\langle q\rangle = \langle\Psi|\widehat{q}|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\Psi|a+a^\dagger|\Psi\rangle.$$

Ved innsetting av tilstandsvektoren, og benyttelse av at
$a|0\rangle = 0, \quad a|1\rangle = |0\rangle, \quad a^\dagger|0\rangle = |1\rangle, \quad a^\dagger|1\rangle = \sqrt{2}|2\rangle$
får vi

$$|\Psi_1\rangle = (a+a^\dagger)|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle e^{-iE_1t/\hbar} + |1\rangle e^{-iE_0t/\hbar}\right) + |2\rangle e^{-iE_1t/\hbar}. \tag{1}$$

Vha ortogonalitet, $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, og vha

$$\langle\Psi,t| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 0|e^{iE_0t/\hbar} + \langle 1|e^{iE_1t/\hbar}\right),$$

får vi

$$\langle\Psi|a+a^\dagger|\Psi\rangle = \frac{1}{2}e^{i(E_0-E_1)t/\hbar} + \frac{1}{2}e^{i(E_1-E_0)t/\hbar} = \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}\right) = \cos(\omega t),$$

da $E_1 - E_0 = \hbar\omega$. Innsatt i uttrykket for $\langle q\rangle$ får vi

$$\langle q\rangle = \underline{\underline{\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\cos(\omega t).}}$$

b) Da $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2q^2$ har vi

$$\langle V\rangle = \frac{1}{4}\hbar\omega\langle\Psi|(a+a^\dagger)^2|\Psi\rangle = \frac{1}{4}\hbar\omega\langle\Psi_1|\Psi_1\rangle,$$

med ovenstående definisjon (1) av $|\Psi_1\rangle$. Normen av $|\Psi_1\rangle$ finner en lett:

$$\langle\Psi_1|\Psi_1\rangle = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1 = 2,$$

og dermed

$$\langle V \rangle = \underline{\underline{\frac{1}{2}\hbar\omega}}.$$

c) Middelverdien av impulsen er

$$\langle p \rangle = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\; i\langle \Psi | a^\dagger - a | \Psi \rangle.$$

Her er

$$(a^\dagger - a)|\Psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle e^{-iE_0 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle e^{-iE_1 t/\hbar},$$

og dermed

$$\langle p \rangle = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} i \left(-\frac{1}{2} e^{i(E_0 - E_1)t/\hbar} + \frac{1}{2} e^{i(E_1 - E_0)t/\hbar} \right) = \underline{\underline{-\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \sin(\omega t)}}.$$

Legg merke til at

$$\frac{1}{m}\langle p \rangle = \frac{d}{dt}\langle q \rangle,$$

som det burde være etter Ehrenfests teorem (likn. (4.25) i boka).

d) Ved en energimåling kan en bare få som resultat en av egenverdiene $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ til energioperatoren. Sannsynlighetene er gitt som absoluttkvadratet av utviklingskoeffisientene når en utvikler systemets tilstand $|\Psi\rangle$ i energiegentilstander. Den oppgitte tilstand er en overlagring av to energiegentilstander, $|0\rangle$ og $|1\rangle$, med utviklingskoeffisienter hvis absoluttkvadrat er $\frac{1}{2}$. Ved måling finner vi enten energien $\frac{1}{2}\hbar\omega$ eller $\frac{3}{2}\hbar\omega$, med lik sannsynlighet $\frac{1}{2}$.

Oppgave 2

a) Som forelesningene.

b) For å beregne E_{RR} trenger vi endel middelverdier som vi beregner som integraler. Først

$$\langle f | f \rangle = \int |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau x^2} \, dx = \sqrt{\pi/\tau}.$$

Så integralet med den potensielle energi:

$$\langle f | x^4 | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\tau x^2} \, dx.$$

Det kan regnes ut vha det oppgitte integralet, eller ved å derivere det første integralet mhp τ:

$$\langle f | x^4 | f \rangle = \frac{d^2}{d\tau^2} \int e^{-\tau x^2} \, dx = \frac{d^2}{d\tau^2} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} = \sqrt{\pi}\, \frac{3}{4}\, \tau^{-\frac{5}{2}}.$$

Det siste integralet vi trenger er

$$\langle f|\widehat{p}_x^2|f\rangle = -\hbar^2 \int f^* \frac{d^2}{dx^2} f \; dx.$$

En delvis integrasjon gir dette lik

$$\hbar^2 \int \frac{df^*}{dx}\frac{df}{dx} \; dx = \hbar^2\tau^2 \int x^2 e^{-\tau x^2} \; dx = \hbar^2\tau^2 \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\tau^{-\frac{3}{2}} = \hbar^2 \frac{1}{2}\sqrt{\pi\tau}.$$

Innsatt får vi

$$E_{RR} = \frac{\langle f|\widehat{H}|f\rangle}{\langle f|f\rangle} = \frac{(\hbar^2/4m)\sqrt{\pi\tau} + (3g/4)\sqrt{\pi/\tau^5}}{\sqrt{\pi/\tau}} = \frac{\hbar^2}{4m}\tau + \frac{3g}{4\tau^2}.$$

Den beste verdien finner vi ved å minimalisere mhp τ. Den deriverte

$$\frac{dE_{RR}}{d\tau} = \frac{\hbar^2}{4m} - \frac{3g}{2\tau^3}$$

er null for $\tau = (6gm/\hbar^2)^{1/3}$. Det gir minimumsverdien

$$E_{RR} = \frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{6gm}{\hbar^2}\right)^{1/3} + \frac{3g}{4}\left(\frac{6gm}{\hbar^2}\right)^{-2/3} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(\frac{9\hbar^2}{2m}\right)^{\frac{2}{3}} g^{1/3}}}$$

Oppgave 3

a)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{antall partikler spredt inn i romvinkelen } d\Omega \text{ pr. tidsenhet}}{\text{innfallende strømtetthet}}.$$

b) Innsetting av det oppgitte potensial i uttrykket for spredningsamplituden gir

$$f = -\frac{mV_0}{2\pi\hbar^2}\int_0^R \frac{4\pi}{q}\sin(qr)\,r\,dr = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3}\int_0^{qR} x\sin x \; dx = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3}[\sin(qR) - qR\cos(qR)]$$

Det differensielle spredningstverrsnittet er da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 = \underline{\underline{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2 q^3}\right)^2 [\sin(qR) - qR\cos(qR)]^2}},$$

der $q = 2k\sin(\vartheta/2)$.

c) Bornapproksimasjonen ventes være en god tilnærmelse når forstyrrelsen av den innfallende stråle er beskjeden. Det vil være tilfelle når energien er høy nok, eller når potensialet er svakt nok.

Oppgave 4

a) Utvikling av tilstanden i egentilstander for S_z er flg:

$$\chi = e^{-i\omega t/2}\cos(\alpha/2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i\omega t/2}\sin(\alpha/2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Sannsynlighetene er gitt ved absoluttkvadratet av koeffisientene. Det gir

$$P_\uparrow = \underline{\underline{\cos^2(\alpha/2)}}.$$

b) Middelverdiene beregnes slik

$$\langle S_i \rangle = \chi^\dagger S_i \chi = \left(e^{i\omega t/2}\cos(\alpha/2), e^{-i\omega t/2}\sin(\alpha/2)\right) S_i \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2}\cos(\alpha/2) \\ e^{i\omega t/2}\sin(\alpha/2) \end{pmatrix},$$

ved innsetting av matriserepresentasjonen for S_i, $(i = x, y, z)$.

Vi finner

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) = \underline{\underline{\frac{\hbar}{2}\cos(\omega t)\sin\alpha}} \tag{2}$$

$$\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2}(-ie^{i\omega t} + ie^{-i\omega t})\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) = \underline{\underline{\frac{\hbar}{2}\sin(\omega t)\sin\alpha}} \tag{3}$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2}\left(\cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)\right) = \underline{\underline{\frac{\hbar}{2}\cos\alpha}} \tag{4}$$

c) Lengden av den midlere spinnvektoren

$$\langle \vec{S} \rangle = \vec{e}_x \langle S_x \rangle + \vec{e}_y \langle S_y \rangle + \vec{e}_z \langle S_z \rangle$$

er lik

$$\sqrt{\langle S_x \rangle^2 + \langle S_x \rangle^2 + \langle S_x \rangle^2} = \underline{\underline{\frac{\hbar}{2}}}.$$

Så den midlere spinnvektor er en vektor av konstant lengde som danner en vinkel α med z-aksen, og med tidavhengige x- og y-komponenter tilsvarende rotasjon rundt z-aksen med vinkelfrekvens ω.