NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:

Professor Per Hemmer, tel. 73 59 36 48

EKSAMEN I SIF4045 KVANTEMEKANIKK

mandag 29. juli 2002
kl. 09.00 – 15.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

En side med uttrykk og formler er vedlagt.

Sensuren faller 26. august 2002.

Oppgave 1

En partikkel med masse m befinner seg i det éndimensjonale potensialet

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{for } |x| > a \\ \dfrac{\hbar^2}{ma^2}\dfrac{x^2}{x^2-a^2} & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Den normerte grunntilstandsbølgefunksjonen i dette potensialet er

$$\psi_0(x) = N(a^2 - x^2), \tag{1}$$

der $N = \sqrt{15/(16a^5)}$ er normeringskonstanten. Hva er grunntilstandsenergien E_0?

b) Beregn middelverdien $\langle T \rangle$ av partikkelens kinetiske energi $T = p_x^2/(2m)$ i grunntilstanden (1).

Oppgave 2

a) En harmonisk oscillator med Hamiltonoperator

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\widehat{q}^2 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\right) \tag{2}$$

har ortonormerte energiegentilstander $|n\rangle\, e^{-iE_n t/\hbar}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ med energiegenverier $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. (Vi skriver tidsavhengigheten eksplisitt slik at $|n\rangle$ er tidsuavhengig.)

Bruk egenskapene til heve- og senke-operatorene $a^\dagger$ og a til å beregne kommutatoren $[a, a^\dagger]$.

Vis at tilstanden

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\, |n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} \tag{3}$$

er en egentilstand til senkeoperatoren a. Her er α et vilkårlig komplekst tall.

b) Vis at tilstanden (3) er normert til 1.

c) Beregn middelverdien av partikkelens posisjon q i tilstanden (3).

d) Det relativistiske uttrykket for den kinetiske energi kan utvikles for små impulser p (her i én dimensjon):

$$\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2 = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \ldots.$$

For en éndimensjonal harmonisk oscillator kan vi derfor benytte

$$\widehat{H}_1 = -\frac{\widehat{p}^4}{8m^3c^2}$$

som den relativistiske korreksjon til det ikke-relativistiske uttrykket (2).

Bruk heve- og senkeoperatorene til å beregne i første ordens perturbasjonsteori den relativistiske korreksjonen til det $n$te energinivået i oscillatorens energispektrum.

Oppgave 3

a) Gi en fysisk definisjon av det differensielle spredningstverrsnittet $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ for spredning av partikler mot et fast spredende potensial $V(\vec{r})$.

b) For spredning på et kulesymmetrisk potensial $V(r)$ kan spredningsamplituden skrives som en sum av partialbølger,

$$f(\vartheta) = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell\; P_\ell(\cos\vartheta),$$

der ϑ er spredningsvinkelen og P_ℓ er Legendre-polynomer.

Argumenter halvklassisk for at ved spredning på et potensial V med en endelig rekkevidde a vil bare ledd med $\ell < ka$ bidra vesentlig til summen ovenfor. Hva kan en derfor slutte om vinkelavhengigheten av spredning på et potensial med endelig rekkevidde når energien er lav, $E \ll \hbar^2/(2ma^2)$.

c) Uttrykk totaltverrsnittet σ som en sum over partialbølgene (sum over ℓ).

Bruk dette til å vise at totaltverrsnittet er gitt ved imaginærdelen av spredningsamplituden i foroverretningen (det optiske teorem):

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \Im m \; f(0).$$

Oppgave 4

a) Vis at grunntilstandsenergien E_0 for en partikkel med masse m i et éndimensjonalt potensial $V(x)$ aldri er større enn Rayleigh-Ritz-estimatet

$$E_{RR} = \frac{\langle f|\widehat{H}|f\rangle}{\langle f|f\rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^* \widehat{H} \, f \; dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f^* f \; dx}.$$

b) Benytt Rayleigh-Ritz variasjonsmetode med prøvefunksjonen

$$f(x) = e^{-\tau x^2/2},$$

der τ er en variasjonsparameter, til å beregne energien i grunntilstanden i potensialet

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\left[16\left(\frac{x}{a}\right)^6 - 12\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$$

best mulig.

Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

Harmonisk oscillator

Uttrykt ved posisjons- og impuls-operatorene er senke- og heveoperatorene definert ved

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\widehat{q} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\widehat{p} \\
a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\widehat{q} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\widehat{p}
\end{aligned}
$$

Disse stigeoperatorene har egenskapene

$$
\begin{aligned}
a|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\
a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle,
\end{aligned}
$$

der $|n\rangle$ er egentilstand nr. n.

Stasjonær perturbasjonsteori

For $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \lambda \widehat{H}_1$ er energiegenverdiene for små λ gitt ved

$$E_n = E_n^0 + \lambda\langle n|\widehat{H}_1|n\rangle + \lambda^2 \sum_k \frac{\left|\langle k|\widehat{H}_1|n\rangle\right|^2}{E_n^0 - E_k^0} + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

Integraler

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = n!\,a^{-n-1} \qquad (a>0).$$

$$\int_{-\infty}^\infty x^{2n}\,e^{-ax^2}\,dx = c_n\sqrt{\pi}\,a^{-n-\frac{1}{2}}, \qquad \text{der} \quad c_0 = 1, \quad c_1 = \tfrac{1}{2}, \quad c_2 = \tfrac{3}{4}, \quad c_3 = \tfrac{15}{8}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2+ibx}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-b^2/(4a)} \qquad (a>0)$$

$$\iint Y_{\ell m}^*(\vartheta,\varphi)\,Y_{\ell' m'}(\vartheta,\varphi)\,d\Omega = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}.$$

$$\int_0^\pi P_\ell(\cos\vartheta)P_{\ell'}(\cos\vartheta)\,\sin\vartheta\,d\vartheta = \int_{-1}^1 P_\ell(x)P_{\ell'}(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{for } \ell \neq \ell' \\ \frac{2}{2\ell+1} & \text{for } \ell = \ell' \end{cases}$$