Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
NTNU

Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Kåre Olaussen
Telefon: 93652

Eksamen i SIF4072 KLASSISK FELTTEORI
Lørdag 26. mai 2001
09:00–14:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ B
Godkjent lommekalkulator.
K. Rottman: *Matematisk formelsamling*
Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*
Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk*
Sist i dette oppgavesettet er det gitt noen relasjoner som muligens kan være til nytte, men som kandidaten selv må tolke.

Dette oppgavesettet er på 4 sider.

Oppgave 1

I denne oppgaven skal du se på noen aspekter ved modellen definert ved (Klein-Gordon) Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)^* \, (\partial^\mu \varphi) - \lambda \, (\varphi^* \varphi)^n \, , \tag{1}$$

der $\lambda > 0$ og $n > 1$.

a) Skriv ned, eller utled, feltligningene for denne modellen.

b) Anta en løsning av formen $\varphi(x) = A \, \mathrm{e}^{-i\omega t}$, der A er en positiv, reell konstant.

Finn sammenhengen mellom ω og A.

c) Lagrangetettheten (1) er invariant under fasetransformasjoner

$$\varphi(x) \to \mathrm{e}^{-i\epsilon} \, \varphi(x), \quad \varphi^*(x) \to \mathrm{e}^{i\epsilon} \, \varphi^*(x). \tag{2}$$

Skriv ned, eller utled, den konserverte strømmen, j^μ, som opptrer som konsekvens av denne kontinuerlige symmetrien.

d) Vi definerer en antallstetthet $\rho \equiv \dfrac{1}{\hbar c} j^0$. Finn, for løsningen fra punkt **b)**, sammenhengen mellom ρ og A.

e) Virkningen $S = \frac{1}{c}\int d^4x\,\mathcal{L}$ definert fra Lagrangetettheten (1) er invariant under translasjoner i tid og rom,

$$\varphi(x) \to \varphi(x + \epsilon e_{(\nu)}), \quad \varphi^*(x) \to \varphi^*(x + \epsilon e_{(\nu)}), \tag{3}$$

der $e_{(\nu)}$ er en enhetsvektor i ν-retningen, $e^{\mu}_{(\nu)} = \eta^{\mu}{}_{\nu}$.

Skriv ned, eller utled, den konserverte tensoren, $T^{\mu}{}_{\nu}$, som opptrer som konsekvens av disse kontinuerlige symmetriene.

f) Trykket p i systemet er gitt ved

$$p = -\frac{1}{3}T^i_i. \tag{4}$$

Finn, for løsningen fra punkt **b)**, *tilstandsligningen* (sammenhengen mellom p og ρ).

g) Energitettheten u i systemet er gitt ved

$$u = T^0_0. \tag{5}$$

Finn, for løsningen fra punkt **b)**, sammenhengen mellom energitetthet u og trykk p.

Oppgave 2

I denne oppgaven skal du studere bevegelse av punktpartikler i et statisk, rotasjonssymmetrisk rom med linjeelement

$$ds^2 = A(r)c^2dt^2 - B(r)dr^2 - r^2\left(\sin^2\vartheta d\vartheta^2 + d\varphi^2\right). \tag{6}$$

Bevegelsesligningene kan utledes fra Lagrangefunksjonen

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}, \tag{7}$$

der τ er (proposjonal med) egentiden.

a) Anta at bevegelsen skjer i ekvator-planet, $\vartheta = \pi/2$, og utled bevegelsesligningene for $t(\tau)$, $r(\tau)$ og $\varphi(\tau)$.

b) Lagrangefunksjonen (7) er invariant under transformasjonene

$$t \to t + \epsilon, \quad \varphi \to \varphi + \epsilon.$$

Hvilke konserverte størrelser kan utledes fra disse kontinuerlige symmetriene? Kall de tilhørende bevegelseskonstantene for henholdsvis K_t og K_φ. Verifiser også konserveringslovene direkte fra bevegelsesligningene du fant i forrige punkt.

c) Anta nå at bevegelsen er en rent sirkulær, med radius r. Vis at dette setter en betingelse på forholdet mellom K_φ og K_t, av formen

$$\left(\frac{K_\varphi}{K_t}\right)^2 = F(r), \tag{8}$$

og bestem $F(r)$ uttrykt ved størrelser fra ligning (6).

d) Målt i koordinat-tiden t har partikkelen en hastighet $v = r\dfrac{d\varphi}{dt}$.

Bestem hvordan v må avhenge av r for en sirkelbevegelse, og skriv ut dette mer eksplisitt for Schwarzschild-metrikken,

$$A(r) = \left(1 - \frac{R_M}{r}\right), \qquad B(r) = \left(1 - \frac{R_M}{r}\right)^{-1}, \quad R_M = \frac{2MG}{c^2}. \tag{9}$$

e) En observatør som er i ro ved radius r måler partikkelens hastighet til $v_r = r\dfrac{d\varphi}{dt_r}$, der t_r er tiden målt med lokal klokke (altså egentiden til observatøren).

Bestem hvordan v_r må avhenge av r for en sirkelbevegelse i Schwarzschild-metrikken.

f) Ved hvilken radius vil *lyset* kunne gå i sirkelbane i Schwarzschild-metrikken?

Oppgave 3

I denne oppgave skal du se på noen aspekter av Einstein's gravitasjonsligninger i "svak felt" grensen. Dette vil si at man utvikler den metriske tensoren som

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \tag{10}$$

og bare regner til første orden i den symmetriske tensoren h (og dens deriverte).

a) Beregn konneksjonskoeffisientene $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ til første orden i h.

b) Beregn Riemanntensoren $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ til første orden i h.

c) Vis at et felt av formen

$$h_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \Lambda_\nu(x) + \partial_\nu \Lambda_\mu(x), \tag{11}$$

der $\Lambda_\mu(x)$ er et vilkårlig to ganger deriverbart vektorfelt, ikke gir noe bidrag til Riemanntensoren.

d) Beregn Riccitensoren $R_{\beta\delta}$ til første orden i h.

e) Anta at $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$ (vi kan alltid oppnå en slik situasjon ved "gauge" transformasjonen, $h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu$, for passende Λ_μ).

Beregn i dette tilfellet Einsteintensoren $G_{\beta\delta}$ til første orden i h.

f) Vis at konserveringsloven $\partial^\alpha G_{\alpha\beta} = 0$ alltid er oppfylt for det uttrykket du fant i forrige punkt.

Oppgitt:

Nöther's teorem:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi^a\right)} \Delta\varphi^a - M^\mu, \text{ når} \tag{12}$$

$$\Delta\mathcal{L} = \partial_\mu M^\mu, \quad \text{der } \Delta X \equiv \left. \frac{d}{d\epsilon}\tilde{X} \right|_{\epsilon=0} \quad \text{for } X \text{ lik } \varphi^a \text{ og } \mathcal{L}. \tag{13}$$

Noen relasjoner fra differensialgeometri:

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}\right), \tag{14}$$

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}, \tag{15}$$

$$R_{\beta\delta} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\delta}, \tag{16}$$

$$G_{\beta\delta} = R_{\beta\delta} - \frac{1}{2} g_{\beta\delta} R. \tag{17}$$