Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
NTNU

Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Kåre Olaussen
Telefon: 93652

Eksamen i SIF4072 KLASSISK FELTTEORI

Torsdag 30. mai 2002
09:00–15:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C
Godkjent lommekalkulator.
K. Rottman: *Matematisk formelsamling*
Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*
Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk*
Sist i dette oppgavesettet er det gitt noen relasjoner som muligens kan være til nytte under eksamen. Kandidaten må selv tolke disse.

Note: There is also an english version of this exam set.
Sensur blir lagt ut på fagets hjemmeside såsnart den er klar.

Dette oppgavesettet er på 4 sider.

Oppgave 1.

I denne oppgaven skal du se på noen aspekter ved modellen definert ved Liouville Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)\,(\partial^\mu \varphi) - \kappa^2\, \mathrm{e}^{\lambda\varphi}, \tag{1}$$

der φ er et reellt felt, og κ og λ er konstanter.

a) Hvilke fysiske dimensjoner må φ, κ og λ ha for at virkningen

$$S = \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}^d x\ \mathcal{L} \tag{2}$$

skal ha dimensjon $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$? Anta her at d er et vilkårlig positivt heltall (antallet rom-dimensjoner).

b) Skriv ned, eller utled, feltligningene for denne modellen.

c) Anta at feltet φ bare avhenger av t og z, og vis at

$$\varphi(t,z) = \sigma\ \log\left\{ \frac{k\ A'(ct-z)B'(ct+z)}{[A(ct-z)+B(ct+z)]^2} \right\} \tag{3}$$

er løsning av feltligningen for passede valg av konstantene σ og k. Her er c lyshatigheten, A og B er to generelle (to ganger deriverbare) funksjoner i én variabel, og $'$ betyr derivasjon med hensyn på denne variabelen.

d) Vis at virkningen S er invariant under translasjoner i tid og rom

$$\boldsymbol{T}_\nu : \varphi(x) \to \tilde{\varphi}(x;\varepsilon) = \varphi(x + \varepsilon\, e_\nu), \tag{4}$$

der e_ν er en enhetsvektor i ν-retningen, $(e_\nu)^\mu = \delta^\mu_\nu = \eta^\mu_\nu$.

Bruk Nöther-prosedyren til å finne de tilhørende konserveringslovene.

e) Vis at feltligningen er invariant under skalatransformasjoner (dilatasjoner)

$$\boldsymbol{D} : \varphi(x) \to \tilde{\varphi}(x;\varepsilon) = \varphi(\mathrm{e}^{\varepsilon}\, x) + \gamma\varepsilon \tag{5}$$

for et passende valg av konstanten γ.

f) For et passende antall rom-dimensjoner d er også virkningen (2) invariant under skalatransformasjonen (5). Bestem denne verdien for d, og bruk Nöther-prosedyren til å finne den tilhørende konserveringsloven.

Oppgave 2.
Lagrangefunksjonen for relativistiske punktpartikler med masse m under konstant akselerasjon g i z-retningen er (i et bestemt koordinatsystem) gitt ved

$$L = -mc^2\sqrt{1-(\boldsymbol{v}/c)^2} + mgz. \tag{6}$$

a) Skriv ned, eller utled, bevegelsesligningene for slike partikler.

b) To slike partikler starter i ro ved tiden $t = 0$ i henholdsvis posisjonene $\boldsymbol{r}_1(0) = (0,0,0)$ og $\boldsymbol{r}_2(0) = (0,0,z_0)$. Finn banene $\boldsymbol{r}_k(t)$ $(k = 1,2)$ til disse to partiklene for $t \geq 0$.

c) Hvor lang tid tar det, *målt med egentiden for disse partiklene*, å bevege seg én millioner lysår fra startpunktet (målt i det faste koordinatsystemet)?

Anta at $g = 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ og sett $c = 3\times 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Én millioner lysår $\approx 0.947\times 10^{22}$ m.

d) Ved tiden $t = 0$ sendes det et lyssignal fra partikkel 1, dvs. fra posisjonen $\boldsymbol{r}_1(0) = (0,0,0)$, i retning partikkel 2 (dvs. langs z-aksen). Hvis avstanden z_0 er stor, $z_0 \geq z_{\max}$, vil dette lyssignalet aldri nå fram til partikkel 2.

Bestem grenseverdien $z_{\max}$.

Oppgave 3.
Linjeelementet i en statisk, kulesymmetrisk geometri kan skrives på formen

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2a}\,(c\,\mathrm{d}t)^2 - \mathrm{e}^{2b}\,\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{7}$$

der a og b kan være funksjoner av r.

a) Skriv ned de metriske tensorene $g_{\mu\nu}$ og $g^{\mu\nu}$ for denne geometrien i disse koordinatene.

Einsteins gravitasjonsligninger lyder

$$G^{\mu}_{\nu} = 8\pi\kappa T^{\mu}_{\nu}. \tag{8}$$

Anta at de relevante (for denne oppgaven) komponentene av energi-impuls tensoren har formen

$$\begin{aligned} T^0_0 &= \begin{cases} \rho\, c^2 + \Lambda/\kappa, & 0 \le r \le r_s, \\ \Lambda/\kappa, & r_s < r, \end{cases} \\ T^1_1 &= \Lambda/\kappa, \end{aligned} \tag{9}$$

hvor ρ og Λ er positive konstanter med $\Lambda/\kappa \ll \rho\, c^2$. Dette svarer til en stjerne med konstant massetetthet ρ og radius r_s i et univers med kosmologisk konstant Λ.

b) Se først på $(\mu, \nu) = (0, 0)$ komponenten av ligning (8). Vis at du ved å innføre

$$\mathrm{e}^{-2b(r)} = 1 - \frac{R(r)}{r} \tag{10}$$

kan omskrive denne ligningen på formen $R'(r) = f(r)$, der høyresiden $f(r)$ er eksplisitt kjent.

c) Anta at $b(0) = 0$, og skriv ned det eksplitte uttrykket for $\mathrm{e}^{-2b(r)}$.

d) Vis, ved å kombinere $(\mu, \nu) = (0, 0)$ og $(\mu, \nu) = (1, 1)$ komponentene av ligning (8), at $a(r) + b(r)$ ikke avhenger av r i området $r > r_s$.

e) Løsningen for $a(r)$ og $b(r)$ bryter sammen når r overstiger en maksimal radius $r_{\max}$. Hva tror du er grunnen til det?

Oppgitt:

Euler-Lagrange ligningene:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi^a\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^a}. \tag{11}$$

Nöther's teorem:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi^a\right)} \Delta\varphi^a - M^\mu, \text{ når} \tag{12}$$

$$\Delta\mathcal{L} = \partial_\mu M^\mu, \quad \text{der } \Delta X \equiv \left.\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{X}\right|_{\varepsilon=0} \quad \text{for } X \text{ lik } \varphi^a \text{ og } \mathcal{L}. \tag{13}$$

To integraler:

$$\int \frac{\mathrm{d}t\, gt}{\sqrt{1+(gt/c)^2}} = \frac{c^2}{g}\sqrt{1+(gt/c)^2}, \quad \int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1+(gt'/c)^2}} = \frac{c}{g}\log\left[\frac{gt}{c} + \sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}\right] \tag{14}$$

Noen relasjoner fra differensialgeometri:

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}\right), \tag{15}$$

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}, \tag{16}$$

$$R_{\beta\delta} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\delta}, \tag{17}$$

$$G_{\beta\delta} = R_{\beta\delta} - \frac{1}{2} g_{\beta\delta} R. \tag{18}$$

Einstein-tensoren for en kulesymmetrisk geometri:
Med et kulesymmetrisk linje-element på formen,

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2a}\left(c\,\mathrm{d}t\right)^2 - \mathrm{e}^{2b}\,\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{19}$$

der a og b kan avhenge av $x^0 = c\,t$ og r, er de ikke-forsvinnende komponentene av Einstein-tensoren gitt ved

$$\begin{aligned}
G^0_0 &= \mathrm{e}^{-2b}\left(\frac{2b'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}, \\
G^1_0 &= -\mathrm{e}^{-2b}\,\frac{2\dot{b}}{r}, \\
G^0_1 &= \mathrm{e}^{-2a}\,\frac{2\dot{b}}{r}, \\
G^1_1 &= -\mathrm{e}^{-2b}\left(\frac{2a'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}, \\
G^2_2 = G^3_3 &= -\mathrm{e}^{-2b}\left(a'' + a'^2 - a'\,b' + \frac{a'-b'}{r}\right) - \mathrm{e}^{-2a}\left(\dot{a}\,\dot{b} - \ddot{b} - \dot{b}^2\right),
\end{aligned} \tag{20}$$

der $\dot{}$ betyr derivasjon med hensyn på x^0, og $'$ betyr derivasjon med hensyn på r.