Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Kåre Olaussen
Telefon: 93652

Eksamen i SIF4072 KLASSISK FELTTEORI

Onsdag 6. august 2003
09:00–15:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C
Godkjent lommekalkulator.
K. Rottman: *Matematisk formelsamling*
L. Råde og B. Westergren: *Mathematische Formeln*
I. Bronstein, K. Semendjajew, G. Musiol og H. Mühlig: *Taschenbuch der Mathematik*
Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*
Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk*
Sist i dette oppgavesettet er det gitt noen relasjoner som muligens kan være til nytte under eksamen. Kandidaten må selv tolke disse.

Sensur blir lagt ut på fagets hjemmeside såsnart den er klar.

Dette oppgavesettet er på 3 sider.

Oppgave 1.
Dynamikken for et rotasjonssymmetrisk gravitasjonsfelt (uten kobling til materiefelter) kan med visse restriksjoner beskrives ved Lagrangetettheten

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & r^2\,\mathrm{e}^{(\nu-\lambda)/2}\left[\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{2}\nu'\lambda' + \frac{2}{r}(\nu'-\lambda') + \frac{2}{r^2}\right] \\ & -r^2\,\mathrm{e}^{(\lambda-\nu)/2}\left[\ddot\lambda + \frac{1}{2}\dot\lambda^2 - \frac{1}{2}\dot\nu\dot\lambda\right] - 2\,\mathrm{e}^{(\nu+\lambda)/2} \qquad (1)\end{aligned}$$

der $\nu = \nu(t,r)$ og $\lambda = \lambda(t,r)$ er de dynamiske størrelsene, der $\dot{}$ betyr derivasjon med hensyn på tiden t, der $'$ betyr derivasjon med hensyn på radien r, og vi har valgt enheter slik at lyshastigheten $c = 1$.

a) Vis at (1) er ekvivalent med en Lagrangetettheten

$$\mathcal{L}' = 2\,\mathrm{e}^{(\nu-\lambda)/2}\left(1 - r\lambda'\right) - 2\mathrm{e}^{(\nu+\lambda)/2}. \qquad (2)$$

b) Finn feltligningene for $\nu(t,r)$ og $\lambda(t,r)$.

c) Lagrangetettheten $\mathcal{L}'$ avhenger ikke eksplisitt av tiden t. Bruk Nöther's teorem til å finne konserveringsloven som følger av dette.

d) Kan du her finne andre transformasjoner som holder virkningen invariant? Hva blir i tilfelle de tilhørende konserveringslovene?

e) Bruk feltligningene til å vise at kombinasjonen $\nu + \lambda$ ikke avhenger av r.

f) Finn den generelle løsningen til feltligningene for ν og λ.

Oppgave 2.
Lagrangefunksjonen for relativistiske punktpartikler med masse m under konstant akselerasjon g i z-retningen er (i et bestemt koordinatsystem) gitt ved

$$L = -mc^2\sqrt{1-(\boldsymbol{v}/c)^2} + mgz. \tag{3}$$

a) Skriv ned, eller utled, bevegelsesligningene for slike partikler.

b) To slike partikler starter i ro ved tiden $t = 0$ i henholdsvis posisjonene $\boldsymbol{r}_1(0) = (0, 0, 0)$ og $\boldsymbol{r}_2(0) = (0, 0, z_0)$. Finn banene $\boldsymbol{r}_k(t)$ $(k = 1, 2)$ til disse to partiklene for $t \geq 0$.

c) Hvor lang tid tar det, *målt med egentiden for disse partiklene*, å bevege seg én millioner lysår fra startpunktet (målt i det faste koordinatsystemet)?

Anta at $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ og sett $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Én millioner lysår $\approx 0.947 \times 10^{22}$ m.

d) Ved tiden $t = 0$ sendes det et lyssignal fra partikkel 1, dvs. fra posisjonen $\boldsymbol{r}_1(0) = (0, 0, 0)$, i retning partikkel 2 (dvs. langs z-aksen). Hvis avstanden z_0 er stor, $z_0 \geq z_{\max}$, vil dette lyssignalet aldri nå fram til partikkel 2.

Bestem grenseverdien $z_{\max}$.

Oppgave 3.
Geometrien til et rotasjonssymmetrisk univers er definert ved linje-elementet

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{\nu}\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{\lambda}\,\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right) \tag{4}$$

Her er $\nu = \nu(t, r)$, $\lambda = \lambda(t, r)$, og har vi valgt enheter slik at $c = 1$.

a) Beregn $\int \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\sqrt{-g}$, der integrasjonen er over kuleflata S_2.

b) Beregn konneksjonskoeffisientene ${\Gamma^{\alpha}}_{\beta\gamma}$ for metrikken (4).

Oppgitt:

Euler-Lagrange ligningene:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi^a\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^a}. \tag{5}$$

Nöther's teorem:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi^a\right)} \Delta\varphi^a - M^\mu, \text{ når} \tag{6}$$

$$\Delta\mathcal{L} = \partial_\mu M^\mu, \quad \text{der } \Delta X \equiv \left.\frac{d}{d\varepsilon}\tilde{X}\right|_{\varepsilon=0} \quad \text{for } X \text{ lik } \varphi^a \text{ og } \mathcal{L}. \tag{7}$$

Noen relasjoner fra differensialgeometri:

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}\right), \tag{8}$$

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}, \tag{9}$$

$$R_{\beta\delta} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\delta}, \tag{10}$$

$$G_{\beta\delta} = R_{\beta\delta} - \frac{1}{2} g_{\beta\delta} R. \tag{11}$$

To integraler:

$$\int \frac{\mathrm{d}t\, gt}{\sqrt{1+(gt/c)^2}} = \frac{c^2}{g}\sqrt{1+(gt/c)^2}, \quad \int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{\sqrt{1+(gt'/c)^2}} = \frac{c}{g}\log\left[\frac{gt}{c} + \sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}\right] \tag{12}$$