Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
NTNU

Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Kåre Olaussen
Telefon: 93652

Eksamen i SIF4072 KLASSISK FELTTEORI

Onsdag 28. mai 2003
09:00–15:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C
- Godkjent lommekalkulator.
- K. Rottman: *Matematisk formelsamling*
- L. Råde og B. Westergren: *Mathematische Formeln*
- I. Bronstein, K. Semendjajew, G. Musiol og H. Mühlig: *Taschenbuch der Mathematik*
- Barnett and Cronin: *Mathematical formulae*
- Øgrim og Lian: *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk*
- Sist i dette oppgavesettet er det gitt noen relasjoner som muligens kan være til nytte under eksamen. Kandidaten må selv tolke disse.

Sensur blir lagt ut på fagets hjemmeside såsnart den er klar.

Dette oppgavesettet er på 3 sider.

Oppgave 1.

Dynamikken for et lukket, isotropt og homogent univers koblet til et Klein-Gordon felt kan (med visse kvalifikasjoner) beskrives ved Lagrangefunksjonen

$$L = a^2\ddot{a} + a + a\dot{a}^2 + \frac{1}{2}a^3\,\dot{\varphi}^2, \tag{1}$$

der $a = a(t)$ er universets radius.

a) Vis at (1) er ekvivalent med en Lagrangefunksjonen

$$L' = a - a\dot{a}^2 + \frac{1}{2}a^3\,\dot{\varphi}^2. \tag{2}$$

b) Finn bevegelsesligningene for a og φ.

c) Lagrangefunksjonen L' avhenger ikke eksplisitt av tiden t. Bruk Nöther's teorem til å finne den konserverte størrelsen (kall den E) som følger av dette.

d) Kan du her finne andre transformasjoner som holder virkningen invariant? Hva blir i tilfelle de tilhørende konserveringslovene?

e) Det viser seg at man må velge startbetingelsene slik at $E = 0$ (for at de fullstendige Einstein ligningene skal være oppfyllt). Hvilken sammenheng må det da være mellom $\dot{\varphi}(0)$, $a(0)$ og $\dot{a}(0)$?

f) Anta at $\dot{\varphi}(0) = 10^{10}$ og $a(0) = 10^{-3}$. Hva blir den maksimale verdien som $a(t)$ kan anta?

g) Lag en kvalitativ skisse av tidsforløpet til $a(t)$, gitt startbetingelsene over.

Oppgave 2.
Start med Minkowski metrikken

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\xi^2. \tag{3}$$

og transformer denne til et akselerert koordinatsystem (t, z) ved følgende relasjoner

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{g}\sqrt{1+2gz}\,\sinh(gt), \\ \xi &= \frac{1}{g}\sqrt{1+2gz}\,\cosh(gt). \end{aligned} \tag{4}$$

a) Finn uttrykket for linje-elementet $\mathrm{d}s^2$ i de nye koordinatene (t, z).

b) Finn bevegelsesligningene for en punktpartikkel i det akselererte koordinatsystemet.

c) Vis at bevegelsesligningene fra forrige punkt kan omskrives på formen

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}s^2} = -g, \tag{5}$$

der s er egentiden til partikkelen.

Oppgave 3.
Geometrien til et lukket, homogent og isotropt univers er definert ved linje-elementet

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a(t)^2\left[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right)\right] \tag{6}$$

Her har vi valgt enheter slik at $c = 1$. Vinklene tar verdier i følgende intervall: $0 \le \chi \le \pi$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi < 2\pi$.

a) Beregn $\int \mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\sqrt{-g}$.

b) Beregn konneksjonskoeffisientene ${\Gamma^\alpha}_{\beta\gamma}$ for metrikken (6).

Oppgitt:

Euler-Lagrange ligningene:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi^a\right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^a}. \tag{7}$$

Nöther's teorem:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi^a\right)} \Delta\varphi^a - M^\mu, \text{ når} \tag{8}$$

$$\Delta\mathcal{L} = \partial_\mu M^\mu, \quad \text{der } \Delta X \equiv \frac{d}{d\varepsilon}\tilde{X}\bigg|_{\varepsilon=0} \quad \text{for } X \text{ lik } \varphi^a \text{ og } \mathcal{L}. \tag{9}$$

Noen relasjoner fra differensialgeometri:

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}\right), \tag{10}$$

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}\Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}, \tag{11}$$

$$R_{\beta\delta} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\delta}, \tag{12}$$

$$G_{\beta\delta} = R_{\beta\delta} - \frac{1}{2} g_{\beta\delta} R. \tag{13}$$