NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag SIF 4088 Ikkelineær dynamikk
Onsdag 31. juli 2002
Tid: 09.00–15.00

Sensurfrist: Onsdag 21. august 2002

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ C): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Oppgave 1:

a) For hvilke av følgende bevegelsesligninger i (x, y)-planet er origo et stabilt fikspunkt, et ustabilt fikspunkt, et sadelpunkt eller eventuelt noe annet:

i) $\dot{x} = x(2 - x - y), \;\; \dot{y} = x - y$
ii) $\dot{x} = x - y, \;\; \dot{y} = 1 - \mathrm{e}^{-2x}$
iii) $\dot{x} = y, \;\; \dot{y} = x(1 + y) - 1$

b) Gitt et todimensjonalt autonomt dynamisk system.
Hva menes med indeksen til en kurve, og indeksen til et fikspunkt for dette systemet?
Hva er indeksen til origo i de tre eksemplene under punkt a)?

c) Hva kan du si om antallet fikspunkt av ulike typer innenfor enhetssirkelen, dersom du vet at bevegelsesligningen i et vilkårlig punkt $(x, y) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ på enhetssirkelen er: $\dot{x} = -\cos(2\varphi)$, $\dot{y} = \sin(2\varphi)$?

Oppgave 2:

Lysblinkene til ildfluehanner har en naturlig periode $2\pi/\omega$ på ca. 0,9 sekund, og tusenvis av ildfluer er i stand til å synkronisere lysblinkene perfekt.
I et eksperiment påvirkes en enkelt ildflue av en lyskilde som blinker med en periode $2\pi/\Omega$. Eksperimentet viser at dersom Ω ligger innenfor et intervall $[\omega - \omega_1, \omega + \omega_1]$ som er symmetrisk om ω, så blinker ildfluen med den påtrykte vinkelfrekvensen Ω, og ikke med sin naturlige vinkelfrekvens ω.

I denne oppgaven betraktes de eksperimentelt observerbare verdiene ω og ω_1 som kjente. En forenklet modell for synkroniseringen beskriver ildfluen som en oscillator med en fasevinkel θ, slik at lysblinket kommer f.eks. når $\theta = 2n\pi$ med n heltallig. Oscillatoren under påvirkning av den periodiske lyskilden beskrives av ligningen

$$\dot{\theta} = \omega + K \sin(\Omega t - \theta) \; , \tag{1}$$

der K er en ikkenegativ konstant (styrken av påvirkningen), mens t er tiden og $\dot{\theta} = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$.

a) Vis at hvis vi innfører faseforskjellen $\phi = \Omega t - \theta$ mellom de to oscillatorene (den ytre lyskilden og ildfluen) som ny variabel, så kan vi skrive bevegelsesligningen på den dimensjonsløse formen

$$\phi' = \mu - \sin \phi \; . \tag{2}$$

der $\phi' = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\tau$ er den deriverte av ϕ med hensyn på en skalert tidsvariabel τ.
Hva er sammenhengen mellom τ og t?
Uttrykk den dimensjonsløse parameteren μ ved de gitte parametrene ω, Ω og K.

b) For hvilke verdier av parameteren μ i ligning (2) har faseforskjellen ϕ et stabilt fikspunkt?
Denne situasjonen kalles *faselåsing*. Hvorfor?
Finn sammenhengen mellom den eksperimentelt bestemte parameteren ω_1 og parameteren K i modellen i ligning (1).

c) For $\Omega > \omega + \omega_1$ vil faseforskjellen ϕ øke hele tiden. Vis at i løpet av tiden

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\Omega - \omega)^2 - \omega_1^2}}$$

øker faseforskjellen med beløpet 2π, dvs. at ildfluen kommer nøyaktig ett blink mer på etterskudd i forhold til den ytre påvirkningen.
Denne sammenhengen mellom størrelsene T, Ω, ω og ω_1 er en forutsigelse fra modellen som kan etterprøves eksperimentelt. Spesielt forutsier modellen en *skaleringslov* for hvordan T går mot uendelig når Ω reduseres ned mot den kritiske verdien for faselåsing, som altså er $\omega + \omega_1$. Hvilken skaleringslov er det?

Oppgave 3:

a) Anta at $u = u(x,t)$ er en løsning av Korteweg–de Vries-ligningen (KdV-ligningen)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \; ,$$

der $u_t = \partial u/\partial t$, osv.. La α, β, γ, δ og ϵ være konstanter, og la

$$U(X,T) = \alpha + \beta u(x,t) \; ,$$

der

$$x = \gamma X + \delta T \; , \qquad t = \epsilon T \; ,$$

eller omvendt,

$$X = \frac{x}{\gamma} - \frac{\delta t}{\gamma\epsilon}\ , \qquad T = \frac{t}{\epsilon}\ .$$

Vis at $U = U(X,T)$ er en løsning av KdV-ligningen

$$U_T - 6UU_X + U_{XXX} = 0$$

for vilkårlige verdier av γ og δ, dersom

$$\alpha = \frac{\delta}{6\gamma}\ , \qquad \beta = \gamma^2\ , \qquad \epsilon = \gamma^3\ .$$

b) Anta spesielt at $u = u(x,t) = \phi(x - ct)$ er en solitonløsning av KdV-ligningen. Solitonet beveger seg med konstant hastighet $c > 0$.
Hvilken ligning må funksjonen ϕ oppfylle?
Siden et soliton pr. definisjon er en lokalisert bølge, må begge grenseverdiene $\phi_+ = \lim_{x\to+\infty}\phi(x)$ og $\phi_- = \lim_{x\to-\infty}\phi(x)$ eksistere. Vis at da må $\phi_+ = \phi_-$.
Når en studerer KdV-solitoner, er det vanlig å begrense seg videre til det tilfellet at $\phi_+ = \phi_- = 0$. Hvorfor er denne begrensningen uvesentlig?

c) Hvordan varierer høyden og bredden av et KdV-soliton med hastigheten?
(Høyde og bredde kunne vi eventuelt også kalle amplitude og bølgelengde. Utled f.eks. sammenhengen mellom hastighet, høyde og bredde ved hjelp av transformasjonen under punkt a) ovenfor.)

d) KdV-ligningen kan skrives som

$$u_t + [L, A] = 0\ ,$$

der L og A er følgende Lax-par av operatorer:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + u(x,t)\ , \\ A &= -4\,\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} + 6u(x,t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 3u_x(x,t)\ . \end{aligned}$$

Bruk det til å vise at når $u(x,t)$ oppfyller KdV-ligningen, så er egenverdispektret til Schrödinger-operatoren L uavhengig av t.

e) Vis at dersom den reelle bølgefunksjonen $\psi = \psi(x,t)$ er en løsning av ligningen $\psi_t = A\psi$, der A er den samme operatoren som i punkt d), så er normeringsintegralet

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \psi^2$$

en bevegelseskonstant.
I beviset er det nødvendig å gjøre visse antagelser om funksjonene $\psi(x,t)$ og $u(x,t)$. Presiser hvilke antagelser du gjør.
Hvorfor er dette resultatet av betydning når det gjelder å bruke invers-spredning-metoden til å løse KdV-ligningen?