



Løsningsforslag til eksamen i FY3404/TFY18 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Torsdag 14. oktober 2004

Et mer fullstendig løsningsforslag, med kommentarer til besvarelsene, legges ut senere

Dette løsningsforslaget er på 3 sider.

Oppgave 1.

La $|n\rangle$ være en normert egentilstand til antallsoperatoren $N = a^\dagger a$ for en harmonisk oscillator, $N|n\rangle = n|n\rangle$ og $\langle n|n\rangle = 1$. Da er

- | | | |
|---|-------------------------------------|---------|
| A. $a^\dagger n\rangle = \sqrt{n} n+1\rangle$ | <input type="checkbox"/> | 0 svar |
| B. $a^\dagger n\rangle = n n+1\rangle$ | <input type="checkbox"/> | 0 svar |
| C. $a^\dagger n\rangle = \sqrt{n+1} n+1\rangle$ | <input checked="" type="checkbox"/> | 14 svar |
| D. $a^\dagger n\rangle = \sqrt{n} n\rangle$ | <input type="checkbox"/> | 0 svar |
| E. $a^\dagger n\rangle = \sqrt{n} n-1\rangle$ | <input type="checkbox"/> | 0 svar |

Oppgave 2.

En feltteori er definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)^* (\partial^\mu \varphi) + i (B_\mu^* \partial^\mu \varphi - \partial^\mu \varphi^* B_\mu)$$

der φ er et Klein-Gordon felt, og $B_\mu = B_\mu(x)$ er et eksternt gitt felt. Da er den kanonisk konjugerte impulstettheten til feltet φ gitt som

- | | | |
|--|-------------------------------------|---------|
| A. $\Pi_\varphi = \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}^* + \frac{i}{c} B^0$ | <input checked="" type="checkbox"/> | 12 svar |
| B. $\Pi_\varphi = \dot{\varphi} - iB^0$ | <input type="checkbox"/> | 2 svar |
| C. $\Pi_\varphi = \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}^* - \frac{i}{c} B^0$ | <input type="checkbox"/> | 0 svar |
| D. $\Pi_\varphi = \frac{1}{c} \dot{\varphi}^*$ | <input type="checkbox"/> | 0 svar |
| E. $\Pi_\varphi = \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}$ | <input type="checkbox"/> | 0 svar |

Oppgave 3.

For feltteorien definert i forrige oppgave, skriv ned bevegelsesligningen (Euler-Lagrange ligningen) for feltet φ .

$$\square \phi \equiv \partial_\mu \partial^\mu \varphi = i \partial_\mu B^\mu \quad \text{og/eller} \quad \square \varphi^* = -i \partial_\mu B^{\mu*}$$

Oppgave 4.

La $c_r(\mathbf{k}), c_r^\dagger(\mathbf{k})$ være et sett annihilasjons- og kreasjonsoperatorer for et kvantisert fritt Diracfelt (definert i et endelig volum med periodiske grensebetingelser), og la $|\Omega\rangle$ være vakuumbestandningen for denne teorien. Da er matrise-elementet

$$\mathcal{M} \equiv \langle \Omega | c_r(\mathbf{k}_1) c_r(\mathbf{k}_2) c_r^\dagger(\mathbf{k}_3) c_r^\dagger(\mathbf{k}_4) | \Omega \rangle$$

lik

- | | | | |
|----|---|-------------------------------------|---------|
| A. | $\mathcal{M} = \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_4} + \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}$ | <input type="checkbox"/> | 2 svar |
| B. | $\mathcal{M} = \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3} - \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_4}$ | <input checked="" type="checkbox"/> | 10 svar |
| C. | $\mathcal{M} = \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} + \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_4} + \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}$ | <input type="checkbox"/> | 0 svar |
| D. | $\mathcal{M} = \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} \delta_{\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} - \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3} \delta_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_4} + \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}$ | <input type="checkbox"/> | 0 svar |
| E. | $\mathcal{M} = \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}$ | <input type="checkbox"/> | 2 svar |

Oppgave 5.

En fri feltteori er definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - M^2 \varphi^* \varphi + \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi,$$

der $F^{\mu\nu}$ er den elektromagnetiske felttensoren, φ er et Klein-Gordon felt og ψ er et Dirac-felt. I denne modellen er det formelle uttrykket for vakuumergergi per volumenhet, $\varepsilon = E_0/V$, lik

- | | | | |
|----|--|-------------------------------------|--------|
| A. | $\varepsilon = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[p + \sqrt{p^2 + M^2} + \sqrt{p^2 + m^2} \right]$ | <input type="checkbox"/> | 5 svar |
| B. | $\varepsilon = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[p + \sqrt{p^2 + M^2} - 2\sqrt{p^2 + m^2} \right]$ | <input checked="" type="checkbox"/> | 1 svar |
| C. | $\varepsilon = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[p + \sqrt{p^2 + M^2} - \sqrt{p^2 + m^2} \right]$ | <input type="checkbox"/> | 3 svar |
| D. | $\varepsilon = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \left[p + \sqrt{p^2 + M^2} - \sqrt{p^2 + m^2} \right]$ | <input type="checkbox"/> | 2 svar |
| E. | $\varepsilon = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[p + 2\sqrt{p^2 + M^2} - 4\sqrt{p^2 + m^2} \right]$ | <input type="checkbox"/> | 3 svar |

når vi bruker naturlige enheter.

Oppgave 6.

Basert på ren dimensjonsanalyse ville man (i naturlige) enheter anta at vakuumergergien er av størrelsesorden $\varepsilon \approx 1 \text{ TeV}^4$. Omregnet til SI-enheter svarer dette til en massetetthet på

- | | | | |
|----|--|-------------------------------------|--------|
| A. | $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{10} \text{ kg/m}^3$ | <input type="checkbox"/> | 1 svar |
| B. | $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{16} \text{ kg/m}^3$ | <input type="checkbox"/> | 1 svar |
| C. | $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{32} \text{ kg/m}^3$ | <input checked="" type="checkbox"/> | 9 svar |
| D. | $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{48} \text{ kg/m}^3$ | <input type="checkbox"/> | 2 svar |
| E. | $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{64} \text{ kg/m}^3$ | <input type="checkbox"/> | 1 svar |

Oppgitt: Lyshastigheten $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$, Planck's konstant $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}$, positronladningen $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Oppgave 7.

Når γ^μ er representert ved 4×4 -matriser blir $T \equiv \text{Tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu)$ lik

- A. $T = -128$ 5 svar
- B. $T = -32$ 6 svar
- C. $T = 4$ 1 svar
- D. $T = 32$ 2 svar
- E. $T = 128$ 0 svar

Oppgave 8.

La \mathcal{T} være tidsordningsoperatoren og $\psi(x), \bar{\psi}(x)$ et kvantisert Diracfelt. Da gjelder (i naturlige enheter, dvs. når $\hbar = c = 1$)

- A. $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = \mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \}$ 3 svar
- B. $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = \mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \} + iS_F(x - y)$ 2 svar
- C. $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = \mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \} - iS_F(x - y)$ 1 svar
- D. $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = -\mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \}$ 8 svar
- E. $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = -\mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \} - iS_F(x - y)$ 0 svar

der $S_F(x - y)$ er Feynmans propagator for Dirac-partikler.

Oppgave 9.

Feynmans propagator for Dirac-partikler er definert ved ligningen

$$iS_F(x - y) = \langle \Omega | \mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | \Omega \rangle.$$

For en Dirac-partikler med masse m kan denne propagatoren representeres ved Fourier-integralet (i naturlige enheter)

- A. $iS_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$ 1 svar
- B. $iS_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$ 2 svar
- C. $iS_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$ 0 svar
- D. $iS_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} - m)}{p^2 - m^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$ 4 svar
- E. $iS_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$ 7 svar

Oppgave 10.

Diracligningen

$$[i(\gamma^0 \partial_0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) - m] \psi(x^0, \mathbf{x}) = 0$$

er invariant under rominversjon (paritets-transformasjon), $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$. Dvs. at hvis $\psi(x^0, \mathbf{x})$ løser Diracligningen så gjør også $\psi_P(x^0, \mathbf{x})$ det, når

- A. $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = \psi(x^0, -\mathbf{x})$ 1 svar
- B. $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = \gamma^0 \psi(x^0, -\mathbf{x})$ 11 svar
- C. $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = i\gamma^2 \psi^*(x^0, -\mathbf{x})$ 1 svar
- D. $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = \gamma^1 \gamma^3 \psi^*(x^0, -\mathbf{x})$ 1 svar
- E. $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = \psi^*(-x^0, -\mathbf{x})$ 0 svar