Institutt for fysikk 2005

TFY4100 Fysikk
Eksamen 31.mai 2005. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
Rett svar:	D	A	D	C	A	D	A	B	B	B	D	C	C

Detaljer om spørsmålene:

a) I tyngdefeltet peker akselerasjonen, $\vec{g}$, alltid rett nedover.

b) Kulas kinetiske energi $\frac{1}{2}mv^2$ "spises" opp av krafta F over en strekning $s = 5{,}2$ cm. Fra $F \cdot s = \Delta(\frac{1}{2}mv^2)$ bestemmes F.

c) Krafta virker på flata 4.

d) Hookes lov: $T = \frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}$. Med $A = \pi d^2/4$ og konstant F blir $\frac{\Delta L}{L} \cdot d^2 = \frac{\Delta L_2}{L_2} \cdot d_2^2 = \frac{\Delta L_2}{2L} \cdot (2d)^2$, som gir $\Delta L_2 = \Delta L/2$.

e) Total energi = maks. potensiell energi = $E_{\text{pot,max}} = \frac{1}{2}kx_{\text{max}}^2$. Når $x = x_{\text{max}}/2$ blir $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}k(x_{\text{max}}/2)^2 = E_{\text{pot,max}}/4$.

f) Maksimal akselerasjon når fjærkrafta er maks, som den er når kula er i ytterstilling: 4. Tyngdens akselerasjon har ingen betydning, kula svinger om likevektsstilingen der tyngden er motsatt lik likevektsutstrekket av fjæra.

g) Fra øvre graf: bølgelengden $\lambda = 4{,}0$ m. Nedre: perioden $T = \frac{1}{2}$ s. Bølgefarten er da $v = \lambda/T = 8{,}0$ m/s.

h) Gjenkjenner: $k = 2\pi/\lambda = 6,0\ \text{m}^{-1}$, slik at $\lambda = 2\pi/6,0\ \text{m}^{-1} = 1,05$ m.

i) Midlere kinetiske energi er lik indre energi U som er lik $n_{\text{f}}/2 \cdot k_{\text{B}}T$. Når T dobles vil energien dobles, uavhengig av antall frihetsgrader n_{f} for gassen.

j) Carnotvarmepumpa har virkningsgrad $\eta = |\frac{Q_{\text{H}}}{W}| = \frac{T_{\text{H}}}{T_{\text{H}} - T_{\text{L}}} = \frac{308}{40} = 7,70$. Arbeid $W = Q_{\text{H}}/7,70 = 0,195$ kJ.

k) I metta damp er trykket kun avhengig av temperaturen. Om f.eks. volumet øker vil mer væske fordampe og opprettholde trykket.

l) Når temperaturene holdes konstant er forholdene stasjonære. Dvs. varmestrømtettheten er konstant over tid og lik for alle lag gjennom veggen. Hadde den ikke vært det hadde temperaturen blitt endra på flater inni veggen.

m) Stefan-Boltzmanns lov: $j = \sigma T^4$ angir energistrømtetthet (W/m^2). For ei kule er total effekt $P = j \cdot A = j \cdot 4\pi R^2$. Når T konstant og R dobles vil P firedobles.

Oppgave 2. Fluiddynamikk

a) Volumet av tanken er $V = \pi R^2 \ell$, der ℓ er vanndybden. Ved start av tømmingen er derfor høydeforskjellen mellom utløpet og vannoverflata

$$y_0 = \ell_0 + h_0 = \frac{V_0}{\pi R^2} + h_0 = \frac{25 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3}{\pi \cdot (0,125\ \text{m})^2} + 0,500\ \text{m} = 1,009\ \text{m} = \underline{1,01\ \text{m}}.$$

b) Vi bruker Bernoullis likning for en strømlinje gjennom vannoverflata A og utløpet B:

$$p_{\text{A}} + \frac{1}{2}\rho v_{\text{A}}^2 + \rho g h_{\text{A}} = p_{\text{B}} + \frac{1}{2}\rho v_{\text{B}}^2 + \rho g h_{\text{B}}.$$

Ved vannoverflata er hastigheten v_{A} forsvinnende liten og trykket $p_{\text{A}} = p_0$ = ytre lufttrykk. Ved utløpet B må også trykket være atmosfæretrykk: $p_{\text{B}} = p_0$. Dette gir

$$\rho g h_{\text{A}} = \frac{1}{2}\rho v_{\text{B}}^2 + \rho g h_{\text{B}} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{B}}(y) = \sqrt{2g(h_{\text{A}} - h_{\text{B}})} = \underline{\sqrt{2g \cdot y(t)}}.$$

Ved $t = 0$ idet tømmingen starter er $v_{\text{B}}(y_0) = \sqrt{2 \cdot 9,8\ \text{m/s}^2 \cdot 1,01\ \text{m}} = 4,45\ \text{m/s} = \underline{4,5\ \text{m/s}}$.

c) Antatt lik hastighet i hele slangen får vi

$$Q(y) = (\text{areal})(\text{hastighet}) = \pi r^2 v_{\text{B}}(y) = \underline{\pi r^2 \sqrt{2g \cdot y(t)}},$$

og numerisk verdi ved $t = 0$ er

$$Q(y_0) = \pi(4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})^2 \cdot 4,45\ \mathrm{m/s} = 5,03 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^2 \cdot 4,45\ \mathrm{m/s} = 0,224 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s} = \underline{0,22\ \mathrm{dm}^3/\mathrm{s}}.$$

d) Poiseuilles formel oppgitt på formelarket gir forhold mellom vannstrøm Q og trykkfall per lengde: $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ i dette tilfelle. Vi får:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = Q \cdot \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\eta}{r^4} = 0,20 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3 \cdot \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1,00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Ns/m}^2}{(4,0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})^4} = 1989\ \mathrm{N/m}^3 = 1,99\ \mathrm{kPa/m}.$$

Over en $s =$ 1,70 m lang slange blir da trykkfallet $\Delta p = \mathrm{d}p/\mathrm{d}x \cdot s = 1,99\ \mathrm{kPa/m} \cdot 1,70\ \mathrm{m} = \underline{3,4\ \mathrm{kPa}}$.

Drivkraften til vannstrømmen er trykkforskjellen mellom A til B pga. tyngden av vannet: $\Delta p_{AB} = \rho g(h_\mathrm{A} - h_\mathrm{B}) = 1,00 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m}^3 \cdot 9,8\ \mathrm{m/s}^2 \cdot 1,009\ \mathrm{m} = \underline{9,89\ \mathrm{kPa}}$. Vi ser at trykkfallet pga. viskositeten er vesentlig (34%) og vannstrømmen derfor blir mindre enn beregnet i c) der vi antok null viskositet. Sammenlikning med atmosfæretrykket 101 kPa har ingen interesse.

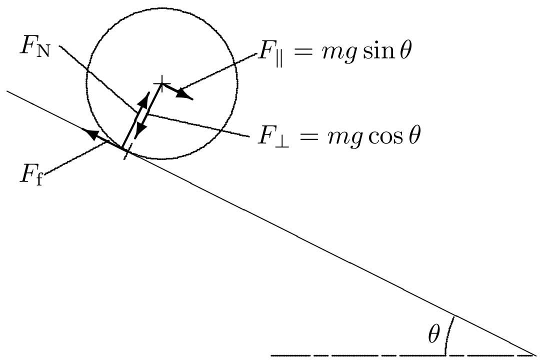
Oppgave 3. Skråplan

a) $W_{\mathrm{kin,tot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$. Her er ved rulling $\omega = v/r$ og treghetsmoment for kule oppgitt til $I = \frac{2}{5}mr^2$. Innsatt får vi:

$$W_{\mathrm{kin,tot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = \underline{\frac{7}{10}mv^2}.$$

b) Energibevarelse: $W_{\mathrm{kin,tot}} + mgh =$ konstant. Dette fordi det er ingen rullefriksjon (tapsfri rulling). Friksjonskrafta mot gliding virker, men så lenge kula ikke glir gjør ikke denne friksjonskrafta noe arbeid (her gjorde flere feil!). Med høyden $h = \ell \sin\theta$ fra startposisjon til kanten får vi

$$0 + mg\ell\sin\theta = \frac{7}{10}mv_0^2 + 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{v_0 = \sqrt{\frac{10}{7}g\ell\sin\theta}}.$$



c) I figuren er tyngdekrafta $m\vec{g}$ vist med sine komponenter.

Newton 2 (N2) normalt på skråplanet bestemmer normalkrafta: $\Sigma F = 0 \Rightarrow F_\mathrm{N} = mg\cos\theta$. Sammenhengen mellom a og $\dot{\omega}$ bestemmes fra $\omega = v/r$ som vi hadde i a), dermed $\dot{\omega} = a/r$

Når disse er bestemt har vi to ukjente: F_f og a. Vi trenger da to likninger:

(N2) langs skråplanet: $mg\sin\theta - F_\mathrm{f} = ma$,

(N2-rot): $F_\mathrm{f}\ r = I\dot{\omega}$.

Merk at ved rulling er glidefriksjonen $F_\mathrm{f} < F_{\max} = \mu F_\mathrm{N}$ (mange har satt disse like, som er feil). Fra (N2-rot) får vi følgende uttrykk for F_f:

$$F_\mathrm{f} = \frac{I \cdot a/r}{r} = \frac{(2/5)mr^2 \cdot a}{r^2} = \frac{2}{5} \cdot ma$$

som innsatt i første likning gir

$$mg\sin\theta - \frac{2}{5} \cdot ma = ma \quad \Rightarrow \quad \underline{a = \frac{5}{7}g\sin\theta}.$$

d) De kjente akselerasjonslikninger: $v = at$ og $\ell = \frac{1}{2}at^2$ gir $t = \sqrt{2\ell/a}$ som løst gir

$$v_0 = v(\ell) = \sqrt{2\ell a} = \underline{\sqrt{\frac{10}{7}g\ell\sin\theta}}.$$

e) Når kula rutsjer er glidefriksjonen maksimal og gitt av $F_\mathrm{f} = \mu \cdot F_\mathrm{N} = \mu \cdot mg\cos\theta$. Ukjente størrelser blir da vinkelakselerasjonen $\dot{\omega}$ og den lineære akselerasjonen a. Merk at ved gliding(rutsjing) gjelder ikke sammenhengen $a = \dot{\omega} \cdot r$ mellom disse, men rotasjonen er langsommere slik at $a > \dot{\omega} \cdot r$.

(N2) langs skråplanet: $mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = ma$ gir

$$a = \underline{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)} = 9,8\ \mathrm{m/s}^2 \cdot (0,50 - 0,12 \cdot 0,866) = 3,88\ \mathrm{m/s}^2 = \underline{3,9\ \mathrm{m/s}^2}.$$

(N2-rot) om kulas sentrum gir: $\mu mg\cos\theta\cdot r = I\cdot\dot\omega$, som gir

$$\dot\omega = \frac{\mu mg\cos\theta\cdot r}{(2/5)mr^2} = \underline{\frac{5}{2}\mu g\cos\theta\cdot\frac{1}{r}} = \frac{5}{2}\cdot 0,12\cdot 9,8\ \mathrm{m/s^2}\cdot 0,866\cdot\frac{1}{0,050\ \mathrm{m}} = 50,92\ \mathrm{s^{-2}} = \underline{51\ \mathrm{s^{-2}}}.$$

Som en kontroll på at det virkelig blir rutsjing kan vi regne ut: $\dot\omega\cdot r = 50,9\ \mathrm{s^{-2}}\cdot 0,050\ \mathrm{m} = 2,55\ \mathrm{m/s^2}$ som altså er mindre enn $a = 3,9\ \mathrm{m/s^2}$.

[Ikke del av oppgaven, men vi kunne også regnet ut ved hvilken vinkel θ_0 som rutsjingen akkurat starter. Da må vi anta friksjonskoeffisient for gliding (kinematiske) er lik den statiske: $\mu = 0,12$. Ved grensen er akkurat $F_\mathrm{f} = \mu mg\cos\theta_0$ samtidig som $a = \dot\omega\cdot r$. Dette gir fra de to siste likningene: $g(\sin\theta_0 - \mu\cos\theta_0) = \frac{5}{2}\mu g\cos\theta_0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} = \frac{7}{2}\mu = 0,420 \quad\Rightarrow\quad \theta_0 = \arctan 0,420 = 23^\circ$.]

Oppgave 4. Termodynamikk.

a) I den isokore prosessen 1-2 får vi fra ideell gasslov $\frac{p_2V_2}{p_1V_1} = \frac{nRT_2}{nRT_1}$. Idet $V_2 = V_1$ gir dette

$$p_2 = p_1\cdot\frac{T_2}{T_1} = 105\ \mathrm{kPa}\cdot\frac{750}{300} = \underline{263\ \mathrm{kPa}}.$$

Da volumet V_3 ikke er gitt kan vi ikke bruke isobaren 3-1 til å beregne T_3. Vi må bruke adiabaten 2-3 og det enkleste er å bruke adiabatlikningen for p og T: $p^{1-\gamma}\cdot T^\gamma$ = konstant. For den toatomige gassen er $c_V' = \frac{5}{2}R$ og $c_p' = \frac{7}{2}R$. Dermed er $\gamma = \frac{c_p'}{c_V'} = \frac{7/2}{5/2} = \frac{7}{5}$. Dette gir

$$T_3 = T_2\cdot\left(\frac{p2}{p3}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = T_2\cdot\left(\frac{p2}{p1}\right)^{-2/7} = T_2\cdot\left(\frac{T2}{T1}\right)^{-2/7} = 750\ \mathrm{K}\cdot\left(\frac{750}{300}\right)^{-2/7} = \underline{577\ \mathrm{K}}.$$

b)
Isokoren 12:
$Q_{12} = C_V\cdot(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\cdot 2,00\ \mathrm{mol}\cdot 8,31\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\cdot mol}}\cdot(750 - 300)\ \mathrm{K} = 18,70\ \mathrm{kJ} = \underline{18,7\ \mathrm{kJ}}$.
Adiabaten 23:
$\underline{Q_{23} = 0\ \mathrm{J}}$.
Isobaren 31:
$Q_{31} = C_p\cdot(T_1 - T_3) = \frac{7}{2}nR(T_1 - T_3) = \frac{7}{2}\cdot 2,00\ \mathrm{mol}\cdot 8,31\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K\cdot mol}}\cdot(300 - 577)\ \mathrm{K} = -16,11\ \mathrm{kJ} = \underline{-16,1\ \mathrm{kJ}}$.
Med opsjonen $T_3 = 550$ K blir svaret $Q_{31} = -14,54$ kJ.

c) Virkningsgraden definert $e = W/Q_\mathrm{inn}$. Her er $Q_\mathrm{inn} = Q_{12}$ og med grunnlag i at $\Delta U = Q - W = 0$ for den totale sykliske prosessen blir netto arbeid utført lik $W = Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = 2,58$ kJ. Dermed er

$$e = \frac{W}{Q_\mathrm{inn}} = \frac{2,58}{18,7} = 0,138 = \underline{0,14}.$$

Med opsjonen $T_3 = 550$ K og $Q_{31} = -14,54$ kJ blir svaret $e = \frac{W}{Q_\mathrm{inn}} = \frac{4,16}{18,7} = 0,222 = \underline{0,22}$.

[Volumene var det ikke spurt etter, men flere har regnet dem ut: $V_1 = V_2 = 47,5\ \mathrm{dm^3}$, $V_3 = 91,4\ \mathrm{dm^3}$.
Alle arbeid og endringer i indre energi er: $W_{12} = 0$; $W_{23} = 7,19$ kJ; $W_{31} = -4,61$ kJ; $\Delta U_{12} = Q_{12} = 18,7$ kJ; $\Delta U_{23} = -W_{23} = -7,19$ kJ; $\Delta U_{31} = c_V'n(T_1 - T_3) = -11,52$ kJ;]

[Det var i denne oppgaven uheldig å bruke symbolet C_V for den molare varmekapasiteten $\frac{5}{2}R$ for gassen, ikke konsistent med standard bruk og formelliste. Skulle vært skrevet $c_V' = \frac{5}{2}R$. Mange har blitt misledet av dette og glemt å multiplisere med antall mol (n = 2,0 mol) ved utregning av varmene. Svarene skal da bli $Q_{12} = 9,4$ kJ/mol og $Q_{31} = -8,1$ kJ/mol og virkningsgraden i c) blir den samme. Flere har også pga. dette rotet ved beregning av adiabatkonstanten. C_V burde rett og slett ikke vært oppgitt, den er gitt for en toatomig ideell gass.]

A.Mi. 7.juni 2005