Institutt for fysikk, NTNU
TFY4102 Fysikk, våren 2007

Løsningsforslag: Eksamen TFY4102, våren 2007

I tilknytning til en del av oppgavene finner du nedenfor kommentarer av forskjellig slag. Dette må *ikke* forståes slik at kommentarer av denne typen var forventet i eksamensbesvarelsene! Kommentarene er ment å utfylle løsningsforslagene, forhåpentlig til glede for deg som bruker dem i arbeidet med faget i tiden fremover.

Oppgave 1

a. Når koherent lys med bølgelengde λ passerer (vinkelrett) gjennom en spalt med bredde a, fører fenomenet diffraksjon (med utgangspunkt i Huygens' prinsipp) til at lys på baksiden av spalten sendes i mange retninger θ relativt det innfallende lysets retning (se, for eksempel, figurene i avsnitt 33.4 i Tipler og Mosca). Intensiteten i retning θ er i oppgaven oppgitt som

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \quad ; \quad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta.$$

Siden $\lim_{\alpha\to 0}(\sin\alpha/\alpha) = 1$, er intensiteten i forroverretningen ($\theta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$) lik I_0. Nullpunktene i $I(\theta)$ er bestemt av at $\sin\alpha = 0$. Denne betingelsen er oppfylt når $\alpha = n\pi$, med n et heltall forskjellig fra null. Første nullpunkt i $I(\theta)$ svarer til at $\alpha = \pi$. Dersom kravet er at $I(\theta) \neq 0$ for $|\theta| < \pi/2$, kan selv ikke $\sin\pi/2 = 1$ være tilstrekkelig til at første nullpunkt i $\sin\alpha$ nås:

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta < \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\lambda}\sin(\pi/2) < 1 \quad \Rightarrow \quad a < \lambda.$$

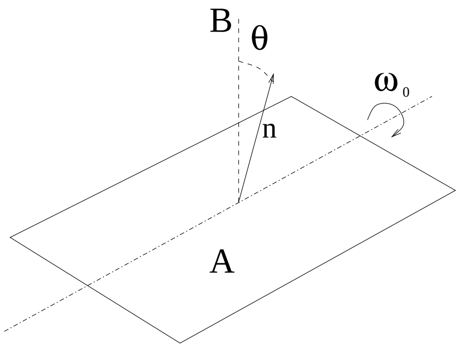
Spaltebredden må altså være mindre enn lysets bølgelengde dersom diffraksjon skal gi lys av endelig intensitet i alle retninger bak spalten.

> Kommentar: Siden alt som trengs for å løse dette oppgavepunktet er oppgitt i selve oppgaven, er det strengt tatt bare evne til å lese og forstå en oppgitt formel som testes her. Men det å ha sett fenomenet på lab-ben burde også hjelpe. Derfor var det overraskende at dette punktet var vanskelig for de fleste, og derfor den detaljerte utledningen ovenfor. Merk at svaret på oppgaven gir viktig, kvalitativ informasjon om hvordan bølger av alle slag forplanter seg i rommet når de møter geometriske hindringer!

b. Lys og radiobølger er begge elektromagnetiske bølger. De forplanter seg derfor begge med lyshastighet, men har svært forskjellig bølgelengde.

Kommentar: Mens λ_{lys} er rundt en halv mikrometer, har for eksempel radiobølger i FM-området en frekvens på rundt 100 MHz og derfor en bølgelengde på ca. 3 m. ($\lambda = c/f$, og $c = 3.0 \cdot 10^8$m). *Alle* elektromagnetiske bølger har, i prinsipp, både bølge og partikkelnatur, men siden energien i et energikvant er $E = hf$, der h er Plancks konstant, blir radiobølgens energikvant ca. 50 millioner ganger mindre enn lysets. Det er derfor så puslete at det snautt nok er i stand til å eksitere noe som helst. I *praksis* er derfor radiobølgenes partikkelnatur neppe observerbar, og radiobølgen kan betraktes som en ren bølge. Lyskvantet, derimot, har som kjent tilstrekkelig energi til å sparke et elektron ut av et metall ($hf > W$, der W er elektronets bindingsenergi til metallet. Eller, om en vil: W er dybden av den energibrønnen et elektron i et metall er fanget i, relativt et elektron i vakuum.) Dette er den fotoelektriske effekt, som Einstein fikk Nobelprisen for å ha forklart ved Plancks kvantehypotese.

Oppgave 2



a. La strømsløyfens areal A (hvis form er uten betydning) ha flatenormalen $\hat{n}$ Den magnetiske fluksen gjennom en enkel vinding blir da

$$\Phi(\theta) = A\hat{n} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos\theta$$

Dersom sløyfen har n vindinger og dersom den roterer med konstant vinkelhastighet ($\theta = \omega_0 t$) om en akse vinkelrett på $\boldsymbol{B}$, blir fluksen

$$\Phi(t) = nAB\cos\omega_0 t.$$

b. Ifølge Faradays induksjonslov er den elektromotoriske kraft, eller om en vil, den induserte spenning, i strømsløyfen da

$$\mathcal{E} = U_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = nAB\omega_0 \sin\omega_0 t.$$

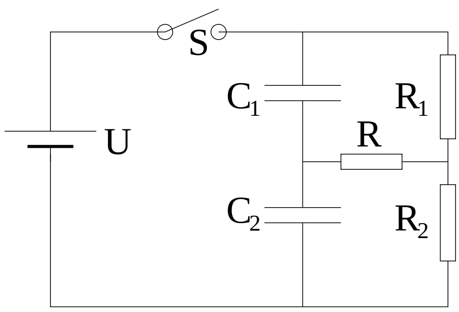
Når amplituden skal være 311 V, betyr dette at

$$311\,\text{V} = nAB\omega_0 = 10 \cdot 0.4\,\text{m}^2 \cdot 2\pi 50\,\text{s}^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad B = 0.247\,\text{T}.$$

Den magnetiske feltstyrken må altså være 0.247 T (tesla) for at vi skal få den spenningen vi ønsker.

Kommentar: Når spenningsamplituden skal være 311 V og ikke 220 V, henger dette sammen med at effekten i en vekselstrømskrets varierer med spenningen. I en ren ohmsk krets er effekten $P(t) = U(t)I(t) = U^2(t)/R = (U_0^2 \cos^2 \omega_0 t)/R$, der U_0 er vekselspenningens amplitude. Siden tidsmiddelet av $\cos^2 \omega_0 t$ er lik $1/2$, innebærer dette at $\bar{P} = U_0^2/2R$ og derfor må amplituden være $U_0 = 220\,\text{V} \cdot \sqrt{2}$ for at vi skal kunne bruke de samme effektformlene på en ohmsk vekselspenningskrets som på en likespenningskrets: $P = UI$. En vekselspenning på "220 V" betyr derfor at den *effektive* spenningen (som gir effekten i en ohmsk krets) er 220 V, mens altså vekselspenningens amplitude er 311 V. Innsikt i disse forholdene var ikke en forutsetning for å løse oppgaven slik den er formulert.

Oppgave 3



a. Alle motstandene er oppgitt å ha en resistans *av størrelsesorden* $\text{M}\Omega = 10^6\,\Omega$, mens de to kondensatorene er oppgitt til å ha kapasitanser *av størrelsesorden* $\text{nF} = 10^{-9}\,\text{F}$. Siden tidskonstanten i en enkel RC-krets (ifølge formelarket) er $\tau = RC$, må oppladningen av kondensatorene i denne mer kompliserte kretsen være karakterisert ved en tidskonstant *av størrelsesorden* $10^6 \cdot 10^{-9} \Omega\text{F} = 10^{-3}\,\text{s}$.

Etter noen millisekunder burde derfor kondensatorene være essensielt fullt oppladet, og stasjonære forhold ha inntrådt i kretsen.

b. Når den stasjonære tilstand har inntrådt, går det ikke lenger noen strøm til eller fra kondensatorene. Derfor går det heller ingen strøm gjennom motstanden R, og spenningen over denne motstanden er da null. Under stasjonære forhold forenkler kretsen seg rett og slett til en seriekopling av motstandene R_1 og R_2. Spenningene over disse motstandene blir derfor:

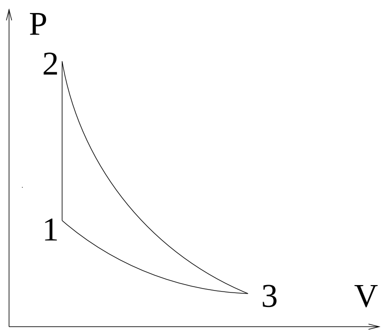
$$U_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \quad ; \quad U_2 = R_2 I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U.$$

Sjekk: $U_1 + U_2 = U$. OK!

Kommentar: Dersom tidsutviklingen i denne kretsen, fra bryteren lukkes til stasjonære forhold har inntrådt, skulle beregnes i detalj for vilkårlige verdier av kapasitanser og resistanser, ville dette være ganske komplisert og krevd løsning av to koplete første ordens differensialligninger (slett ikke umulig, men noe komplisert). Tidsutviklingen vil være karakterisert ved to (ikke én) tidskonstanter. Men når alle resistanser er av samme størrelsesorden, og tilsvarende for kapasitansene, slipper vi å detaljregne og kan i stedet gjøre det enkle overslaget gitt i punkt a over. Å utvikle evnen til å gjøre enkle overslag får en stor glede av i virkelighetens verden! Og merk: At resistansene er av samme størrelsesorden betyr ikke at de er like store! Voksne mennesker veier (har en masse) av størrelsesorden 100 kg. Det innebærer ikke at alle voksne mennesker veier 100 kg! (Også 50 kg er av dekadisk størrelsesorden 100 kg, *ikke* av størrelsesorden 10 kg.)

Et enkelt poeng til: Denne oppgaven (og oppgave 2) illustrerer hvor rasjonelt SI-systemet er oppbygd: Når $1\,\Omega$ er (den avledete) grunnenheten for resistans i SI-systemet, og $1\,\mathrm{F}$ er (den avledete) grunnenheten for kapasitans, vet vi at tidskonstanten $\tau = RC$ kommer ut med grunnenheten $1\,\Omega \cdot 1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{s}$, siden sekund er SIs grunnenhet for tid.

Oppgave 4



I den isokore prosessen $1 \rightarrow 2$ gjøres ikke noe arbeid på eller av systemet, og tilført varme for å heve temperaturen fra T_1 til T_2 går utelukkende med til å øke gassens indre energi. Siden prosessen $2 \rightarrow 3$ er adiabatisk, utveksles ingen varmemengde mellom system og omgivelser i dette tilfellet. Prosessen $3 \rightarrow 1$ er isoterm, og med ideell gass som arbeidssubstans er den indre energien uendret: $U = U(T_1) = U(T_3)$. Derved gir varmelærens første hovedstening (energibevarelse), $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$, at $\Delta Q = \Delta W$ her.

Men siden det er omgivelsene som gjør arbeid på systemet (det koster arbeid å komprimere gassen!), er $\Delta Q = \Delta W < 0$ i denne prosessen. Fra tilstand 3 til tilstand 1 *avgis* varme til omgivelsene. Altså:

a. Absorbert varmemengde i prosessen $1 \rightarrow 2$ er (for ett mol, $n = 1$),

$$Q_{\text{inn}} = nC_V(T_2 - T_1) = C_V(T_2 - T_1).$$

b. I den isoterme prosessen $3 \to 1$ gir første hovedsetning $Q_{\mathrm{ut}} = W_{3\to 1}$, eller ved å bytte fortegn og bruke tilstandsligningen for ett mol ideell gass, $PV = RT_1$,

$$|Q_{\mathrm{ut}}| = W_{1\to 3} = \int_1^3 P\mathrm{d}V = RT_1 \int_1^3 \mathrm{d}V/V = RT_1 \ln(V_3/V_1).$$

c. Siden tilstandene 2 og 3 er forbundet med en adiabatisk prosess, kan vi uttrykke forholdet $V_3/V_1 = V_3/V_2$ ved forholdet $T_2/T_1 = T_2/T_3$:

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

d. Når denne kretsprosessen brukes som varmekraftmaskin, er virkningsgraden definert som arbeid gjort av systemet på omgivelsene pr. syklus, dividert med absorbert varmemengde pr. syklus:

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_{\mathrm{inn}}} = \frac{Q_{\mathrm{inn}} - |Q_{\mathrm{ut}}|}{Q_{\mathrm{inn}}} = 1 - \frac{|Q_{\mathrm{ut}}|}{Q_{\mathrm{inn}}},$$

der vi igjen brukte varmelærens første hovedsetning: Arbeid utført pr. syklus må være lik netto tilført varme pr. syklus. Resultatene funnet ovenfor gir da,

$$\varepsilon = 1 - \frac{RT_1 \ln(T_2/T_1)}{(\gamma - 1)C_V(T_2 - T_1)}.$$

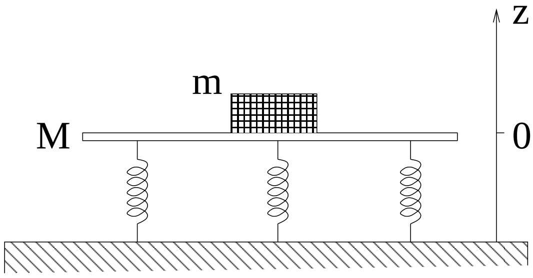
Men siden $(\gamma - 1)C_V = C_P - C_V = R$ (der den siste likheten bare gjelder for en ideell gass), finner vi til slutt:

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Kommentar: Dette eksemplet viser (i likhet med Otto-prosessen vi var innom i forelesningene) at det eksplisitte uttrykket for virkningsgraden er forskjellig for hver type kretsprosess. Den kretsprosessen vi har sett på her, har en virkningsgrad som (i alle fall med ideell gass som arbeidssubstans) kan uttrykkes ved to temperaturer. Men altså ikke med samme uttrykk som en Carnot-prosess mellom to varmereservoarer. For alle kretsprosesser gjelder at de virkningsgradene vi regner ut for det reversible tilfellet er et ideal en i praksis kan strekke seg mot. Enhver reell prosess vil ha større eller mindre innslag av irreversibilitet (siden en praktisk prosess ikke kan kjøres "uendelig langsomt"). Derved vil enhver reell prosess ha lavere virkningsgrad enn dens reversible idealisering.

I eksamenssammenheng er det viktigste å skrive ned et korrekt uttrykk for virkningsgraden for prosessen. Det er selvsagt utmerket dersom du kan forenkle det mest mulig (som i den siste varianten ovenfor), men estetikk er ikke den aller viktigste verdien i denne sammenheng.

Oppgave 5



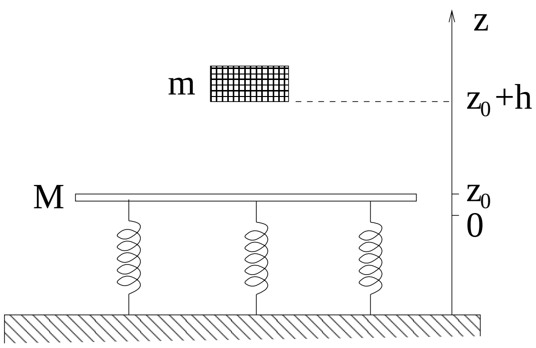
a. Når klossen ligger på plata, er den totale massen $m+M$. Derved er egenfrekvensen, med k som den totale fjærkonstanten (for summen av alle fjærene som holder plata oppe), gitt som $\omega_0 = \sqrt{k/(m+M)}$. Svingeligningen er en direkte konsekvens av Newtons andre lov:

Med $z = 0$ definert som likevektspunktet med klossen på plata, blir nettokraften ved et avvik z gitt som $F(z) = -kz$. Derved får Newtons andre lov formen:

$$F = -kz = (m+M)\ddot{z} \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \frac{k}{m+M}z = 0 \quad \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m+M}}.$$

(Denne utledningen var det strengt tatt ikke spurt om i oppgaven, men er tatt med her for tydelighets skyld.) At $z(t) = A\sin(\omega_0 t + \delta)$ er en løsning av denne svingeligningen (også gitt på formelarket) finnes ved innsetting: To gangers derivasjon med hensyn på t gir $\ddot{z}(t) = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \delta) = -\omega_0^2 \cdot z(t)$.

b. Når klossen fjernes fra plata, reduseres vekten (og derved den ytre kraft nedover) med $\Delta F_g = -mg$. Kraften oppover, fra fjærene, må være redusert med et tilsvarende beløp i platas nye likevektsposisjon, z_0: $\Delta F_k = -k\Delta z = -kz_0 = \Delta F_g = -mg$. Med andre ord: Når klossen fjernes, må platas nye og høyere likevektsposisjon være gitt som $z_0 = mg/k$.



c. Klossen blir så sluppet fra en høyde (z_0+h) der avstanden fra klossens underside til plata i likevektsposisjonen z_0 er h. Når klossen treffer plata har den derfor mistet den potensielle energien mgh. Under dette fallet er energien bevart (når vi, som rimelig er, ser bort fra luftmotstanden).

Det innebærer at all potensiell energi er omgjort til kinetisk energi, og hastigheten v (rettet nedover) som klossen har idet den treffer plata er gitt ved

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}.$$

Kommentar: Det var eksperimenter av denne typen (men særlig med kuler som rullet på skråplan) som overbeviste Galilei om at Aristoteles tok feil: Hastigheten er jo uavhengig av klossens masse! Og med Galilei, Kopernikus og Kepler som bakgrunn, formulerte Newton noen år senere sine lover som representerer essensen av klassisk mekanikk. Og som eksplisitt viser at hastigheten er uavhengig av massen i et eksperiment som dette.

d. Men energien er jo ikke bevart i alle prosesser! I et uelastisk støt er den *ikke* bevart og vi ville stått nokså hjelpeløse dersom ikke en annen bevarelsessetning kom oss til unnsetning. Når vi regner med at støtet er over i løpet av et øyeblikk ($\Delta t \to 0$), gir Newtons andre lov at $F_{\text{netto}}\Delta t = \Delta p_{\text{total}} = 0$. Den totale bevegelsesmengden må være bevart, *også* i et uelastisk støt. Med andre ord $p_{\text{total,før}} = p_{\text{total,etter}}$ eller, når V er den felles hastighet for kloss og plate umiddelbart etter kollisjonen,

$$mv + M \cdot 0 = (m+M)V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}.$$

e. Når klossen treffer plata, settes kloss pluss plate i (tilnærmet) udempete svingninger. Den vertikale posisjonen $z(t)$ må være av formen gitt under pkt.a, nemlig $z(t) = A\sin(\omega_0 t + \delta)$. Begynnelsesverdiene for posisjonen er $z(0) = z_0$ og for hastigheten $\dot{z}(0) = -V$. Dette innebærer at

$$z(0) = A\sin\delta = z_0 \quad ; \quad \dot{z}(0) = \omega_0 A\cos\delta = -V.$$

Her er vi ikke spesielt interessert i δ, så vi bruker den oppgitte identiteten til direkte å bestemme amplituden A:

$$A^2\sin^2\delta + A^2\cos^2\delta = z_0^2 + (-V/\omega_0)^2 = A^2.$$

Med uttrykk for z_0, v og V funnet ovenfor, gir dette,

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \cdot \frac{2gh(m+M)}{k} \\ &= \left(\frac{mg}{k}\right)^2 \left[1 + \frac{2hk}{(m+M)g}\right] \end{aligned}$$

eller,

$$A = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2hk}{(m+M)g}}.$$

Kommentar: Igjen, det viktigste her er å sette opp et korrekt uttrykk, ikke å finne den enklest mulige form. Når alt uttrykkes ved de gitte størrelsene m, M, k og h (og, selvsagt, g) blir sluttuttrykkene i dette og det neste punktet litt rufsete. Likevel, det er ikke dumt å forsøke å sjekke dem, i alle fall kvalitativt. For eksempel: Det må være riktig at amplituden minker med økende fjærkonstant. Eller omvendt: Jo mykere fjærer, jo større svingeamplitude etter at klossen har landet. At amplituden også øker (riktignok litt komplisert) med m, g og h virker også rimelig. Og at en stor platemasse reduserer svingeamplituden noe, ser vettugt ut.

f. Når det svingende systemet er på topp, altså når $z(t) = z_{\text{max}} = A$, er akselerasjonen maksimalt *negativ*, nemlig $\ddot{z}_{\text{maxneg.}} = -A\omega_0^2$. Dersom denne negative verdien ikke overskrider $-g$, vil klossen følge plata gjennom hele svingebevegelsen. Dersom den derimot overskrider $-g$, vil ikke klossen greie å følge plata, den vil (for et kort øyeblikk) "lette" fra plata, for så like etter å kollidere med den igjen. Kort sagt: Klossen vil skramle. Den maksimale fallhøyden h_{max} som *ikke* gir skramling er derved gitt av $\omega_0^2 A = g$, eller

$$\begin{aligned}
\frac{k}{m+M}\cdot\frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2hk}{(m+M)g}} &= g \\
\Rightarrow \quad \frac{m}{m+M}\sqrt{1 + \frac{2hk}{(m+M)g}} &= 1
\end{aligned}$$

Rydding gir til slutt

$$h_{\text{max}} = \frac{(m+M)g}{2k}\cdot\frac{2mM + M^2}{m^2}.$$

Kommentar: Vel, avhengigheten av k og g virker svært så rimelig. Og i dette tilfellet kan vi prøve oss på et grensetilfelle, nemlig $M \ll m$. Det gir $h_{\text{max}} = Mg/k$! Kanskje er det mulig å forstå direkte at slik må det være i denne grensen? Jeg spørger kun!