NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Arne Løhre Grimsmo
Telefon: 91 33 38 72

EKSAMEN TFY4102 FYSIKK

Fredag 10. juni 2011 kl. 0900 - 1300
Bokmål

Hjelpemidler: C

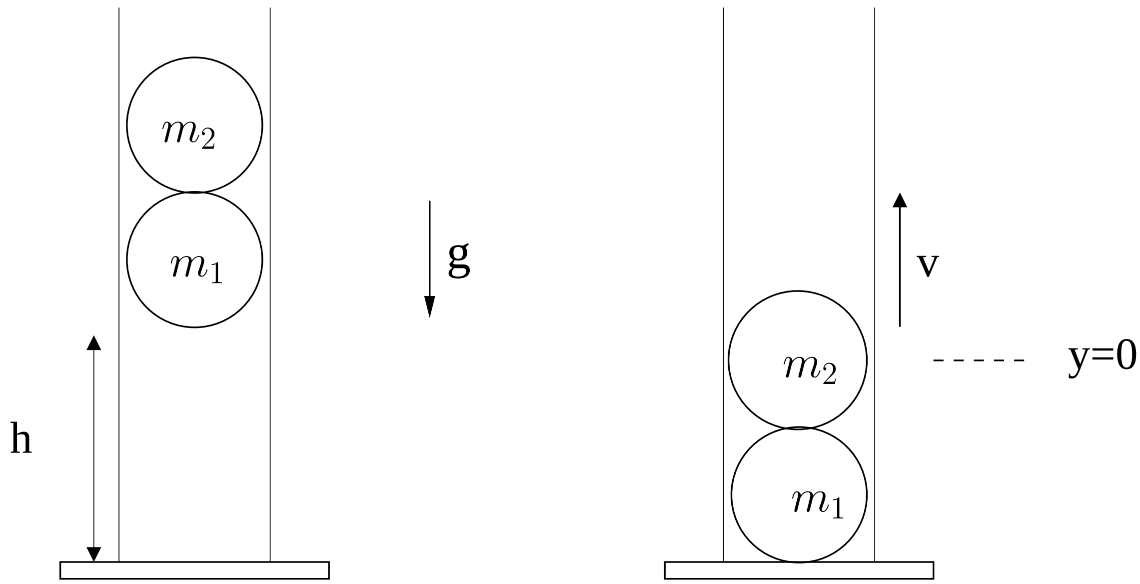
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (Citizen SR-270X eller HP30S.)

Side 2 – 5: Oppgaver
Side 6 – 8: Formelsamling

Prøven består av 4 oppgaver, i alt 16 deloppgaver. Hver deloppgave vil i utgangspunktet telle like mye på sluttkarakteren.

Sensuren kommer rundt 4. juli 2011.

Oppgave 1.



To baller slippes samtidig nedover et rør. Se bort ifra luftmotstand og eventuell friksjon mot røret. Den nederste ballen har masse m_1 og den øverste har masse $m_2 < m_1$. Ballene slippes, med null starthastighet, fra en høyde h over bakken, som vist i figuren. Alle kollisjoner er i denne oppgaven fullstendig *elastiske*, og skjer så raskt at vi kan se på dem som instantane. For å se på dette problemet lønner det seg å dele det opp i to støt som skjer umiddelbart etter hverandre: Først støtet mellom den nederste ballen og bakken, og så et støt mellom den nederste ballen og den øverste.
Følgende størrelser antas kjent i denne oppgaven: h, m_1, m_2 og tyngdeakselerasjonen g.

a) Bestem den nederste ballens hastighet v_0 rett *før* støtet mot bakken. Hva er dens hastighet rett *etter* støtet mot bakken?

b) Hva er endringen i bevegelsesmengden til den nederste ballen i dette støtet? Forklar hvordan bevaring av bevegelsesmengde kan være ivaretatt.

c) Umiddelbart etter at nederste ball har fullført støtet mot bakken kolliderer de to ballene med hverandre. Vis at den øverste ballens hastighet v rett etter kollisjonen blir

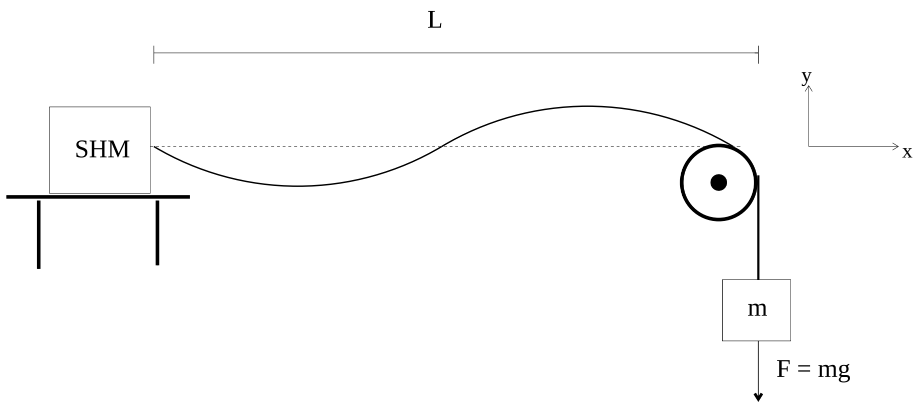
$$v = \frac{Nm_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,|v_0|,$$

og bestem på den måten det positive heltallet N.

d) Finn også ut hvor høyt, y, den vil sprette. Hva er den maksimale høyden y for grensetilfellet der m_1 er mye større enn m_2?

Oppgave 2.

I figuren under ser vi en skjematisk tegning av et forsøk som demonstrerer stående bølger på en streng.



I den ene enden av strengen er det en bølgekilde, betegnet SHM ("Simple Harmonic Oscillator") i figuren, som genererer harmoniske bølger på strengen med frekvens f. I den andre enden går strengen over en trinse, og er festet i et lodd med masse m. Strengens lengde er L og den har massetetthet μ. Følgende størrelser antas kjent i denne oppgaven: L, m, g, f, μ.

a) Hva er bølgetallet k og bølgelengden λ for bølgene på strengen?

b) En superposisjon av en bølge $y_1(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$ som propagerer mot høyre, og en bølge $y_2(x,t) = y_0 \sin(kx + \omega t)$ som propagerer mot venstre, resulterer i en stående bølge $y(x,t) = A(x) \cos \omega t$, dvs. en harmonisk svingning med posisjonsavhengig amplitude $A(x)$. Vis dette, og bestem på den måten $A(x)$. (Tips: $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$.)

c) Vi ser nå på stående bølger på strengen i forsøket beskrevet ovenfor. Anta at utsvinget er null i begge ender, dvs. for $x = 0$ og $x = L$. Bestem de mulige bølgetallene k_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ for slike stående bølger.

d) Vi kan bruke dette oppsettet som et enkelt strengeinstrument. Anta at lengden på strengen er 1 meter, og massen av strengen er 0.5 gram. Vi ønsker å "stemme" instrumentet vårt ved å variere massen til loddet m. Hvor stor må m være for at grunntonen (dvs. den stående bølgen med lavest frekvens) skal bli 440 Hz?

Oppgave 3.

Forbrenningen i en bensinmotor kan tilnærmet beskrives av følgende sykliske prosess:

1. Sylinderen er fylt med en luft-bensin blanding som komprimeres adiabatisk (ingen varmeutveksling).
2. Drivstoffet antennes, og trykket og temperaturen øker, mens volumet holdes konstant (isokor).
3. Deretter ekspanderer gassen adiabatisk, og stempelet trykkes ut igjen til vi når det maksimale volumet vi startet med i steg 1.
4. Eksos slippes ut, slik at gassen kjøles ned. Trykket og temperaturen går ned, mens volumet holdes konstant (isokor), til vi når samme trykk og volum som syklusen startet med.

La det minste volumet i syklusen være V og det største rV. Anta at luft-bensin blandingen kan betraktes som en ideell gass med adiabatkonstant γ. Temperaturen i starten på hvert steg i prosessen betegnes henholdsvis T_1, T_2, T_3 og T_4.

a) Skisser denne syklusen i et pV-diagram.

Varmeutvekslingen i denne syklusen skjer i steg 2 og 4. Kall varmen som tilføres systemet i steg 2 for Q_H og varmen som avgis av systemet i steg 4 for $|Q_C|$ ($Q_C < 0$).

b) Vis at forholdet Q_C/Q_H kan skrives på formen

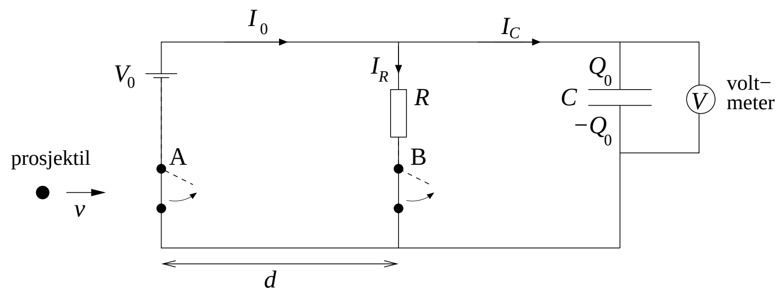
$$\frac{Q_C}{Q_H} = \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}.$$

c) Ta utgangspunkt i uttrykket i punkt b) og bestem effektiviteten e for syklusen, uttrykt ved adiabatkonstanten γ og kompresjonsforholdet r.

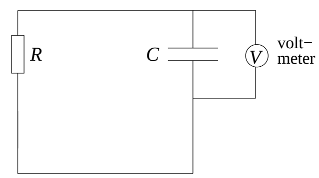
d) Anta at den sykliske prosessens høyeste og laveste temperatur er spesifisert. Bruk Carnot-prosessens spesielle status til å bestemme det maksimale teoretiske kompresjonsforholdet r.

Oppgave 4.

Kretsen i figuren skal brukes til å måle farten til et prosjektil:



Spenningskilden V_0 er koblet til en kondensator med kapasitans C og en motstand med resistans R som vist i figuren. Et voltmeter (V) måler spenningen over C. Det går en stasjonær (dvs tidsuavhengig) strøm i kretsen i det skuddet avfyres. Ved tidspunktet $t = 0$ treffer prosjektilet bryteren A slik at spenningskilden kobles ut:



Fra og med $t = 0$ avtar ladningen på kondensatoren eksponentielt med tiden,

$$Q(t) = Q_0 \, e^{-t/\tau},$$

inntil prosjektilet treffer bryteren B ved tidspunktet $t = T$, slik at strømmen i kretsen stopper. Avstanden fra A til B er d. Størrelsene V_0, C, R og d er å betrakte som kjente størrelser i denne oppgaven.

a) Finn uttrykk for strømmene I_0, I_R og I_C samt kondensatorladningen Q_0, for $t < 0$, dvs før prosjektilet treffer A. (Se figur øverst.)

b) Bruk Kirchhoffs spenningsregel til å skrive ned differensialligningen for kondensatorladningen $Q(t)$ for $0 < t < T$. Vis at uttrykket som er oppgitt for $Q(t)$ ovenfor er en løsning av denne ligningen, og bestem på den måten kretsens tidskonstant τ.

c) Hva blir spenningen $V(t)$ som måles med voltmeteret? Skisser $V(t)$ for $-T < t < 2T$.

d) Anta at kretsen har komponenter med tallverdiene $R = 1.0$ kΩ og $C = 10$ μF, og at spenningskilden er $V_0 = 12.00$ V. Avstanden mellom de to bryterne er $d = 5.0$ m. Etter $t = T$ viser voltmeteret 6.16 V. Hva var prosjektilets hastighet v?

(Et ideelt voltmeter måler potensialforskjellen mellom to punkter i en krets uten å påvirke kretsen forøvrig. Det går ingen strøm gjennom et ideelt voltmeter.)

Formelliste

1 Fysiske konstanter

$N_A = 6.0221 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}	$k_B = 1.3807 \cdot 10^{-23}$ J/K	$R = N_A k_B = 8.3145$ J mol^{-1} K^{-1}
0°C= 273.15K	$\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}$ C^2/Nm^2	$e = 1.6022 \cdot 10^{-19}$C
$c = 2.9979 \cdot 10^8$ m/s	$g = 9.81$ m/s^2	$G = 6.6742 \cdot 10^{-11}$N(m/kg)^2

Merk: k_B har også blitt skrevet som bare k i boka og i forelesningene.

2 Mekanikk

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{p} = m\vec{v} \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

Konstant akselerasjon a:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) &= v_0 + at \\ a(t) &= a \end{aligned}$$

Arbeid og energi:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int \mathrm{d}W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\ &= K_B - K_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \\ K &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

Total energi $E = K + U$ hvor $U = U(\vec{r})$ = potensiell energi. For tyngdekraft: $U = mgh$, og for fjærkraft: $U = \frac{1}{2}kx^2$. $E = K + U$ = konstant, <u>hvis kraften er konservativ</u>.

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\mathbf{k}$$

Effekt: $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$
Gravitasjon: $F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, $U_g = -G\frac{m_1 m_2}{r}$
Overflatefriksjon: $f_k = \mu_k n$, $f_s \leq \mu_s n$
Støt: $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ = summen av <u>eksterne</u> krefter $= 0 \Rightarrow \vec{p}_{\text{før}} = \vec{p}_{\text{etter}}$, kin. energi i støt: $K_{\text{etter}} = K_{\text{før}} + Q$, $Q < 0$ uelastisk, $Q = 0$ elastisk, $Q > 0$ superelastisk
Impuls: $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$
Sirkelbevegelse: Vinkelhastighet $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v/R$. Sentripetalakselerasjon: $a = v^2/R = \omega^2 R$
Hookes lov: $F_x = -kx$

3 Svingninger og bølger

Udempet svingning:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=0, \quad \omega_0=\sqrt{k/m}, \quad T=2\pi/\omega_0, \quad f=1/T$$
$$x(t)=A\cos(\omega_0t+\phi), \quad E=\frac{1}{2}kA^2$$

Dempet svingning: $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0$
For $\frac{b}{2m}<\omega_0$ ("underkritisk"): $x(t)=A\mathrm{e}^{-(b/2m)t}\cos(\omega t+\phi)$, $\omega=\sqrt{\omega_0^2-(b/2m)^2}$
Tvungne svingninger: $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=F_{\max}\cos(\omega_dt)$, amplitude: $A=\frac{F_{\max}}{\sqrt{(k-m\omega_d^2)+b^2\omega_d^2}}$
Bølgeligningen:

$$\frac{\partial^2y}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=0, \quad v=\text{bølgehastighet}$$

Periodisk bølge: $y(x,t)=A\cos(kx\pm\omega t)$, $v=|v|=\omega/k=\lambda/T$
Streng: $v=\sqrt{F/\mu}$, $\mu=$ massetetthet [kg/m]
Stående bølger på streng: $L=n\lambda_n/2$, $f_n=v/\lambda_n=n\frac{v}{2L}$, $n=1,2,3,\ldots$
Lyd: $v=\sqrt{B/\rho}$, $B=$ bulkmodulus, $\rho=$ massetetthet [kg/m^3]
Decibel skalaen: $\beta=10\log_{10}(I/I_0)$, $I=P/A=$ effekt/areal = intensitet, og $I_0=10^{-12}$ W/m^2
Dopplereffekt (positiv hastighetsretn. fra lytter (L) til kilde (S)): $\frac{f_L}{v+v_L}=\frac{f_S}{v+v_S}$
Dobbel spalte eksperimentet, konstruktiv interferens: $d\sin\theta=m\lambda$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$
Diffraksjon fra spalte, destruktiv interferens: $\sin\theta=m\lambda/a$, $m=\pm1,\pm2,\ldots$

4 Termisk fysikk

$n=$ antall mol, $N=nN_A=$ antall molekyler, $f=$ antall frihetsgrader, $k_B=$ Boltzmanns konstant (k_B har også blitt skrevet som bare k i boka og i forelesningene)
Faseovergang: $Q=\pm mL$, $L=L_f$ for smeltepunkt eller L_v for kokepunkt
Varmeoverføring: $H=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$, varmestråling: $H=Ae\sigma T^4$
$\Delta U=Q-W$, $c=\frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T}\rightarrow\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$, $C=\frac{1}{n}\frac{\Delta Q}{\Delta T}\rightarrow\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$
Arbeid: $\mathrm{d}W=p\,\mathrm{d}V\Rightarrow W=\int_1^2p\,\mathrm{d}V$
Ideell gass: $pV=nRT=Nk_BT$, $pV=\frac{2}{3}K$, $K=N(\frac{1}{2}m\bar{v}^2)=$ kin. energi, $\mathrm{d}U=nC_V\,\mathrm{d}T$
Ekvipartisjonsprinsippet:
Legg til $\frac{1}{2}k_BT$ til den kinetiske energien per frihetsgrad per molekyl $\Rightarrow K=fN(\frac{1}{2}k_BT)$, $C_V=f\frac{1}{2}R$, $C_p=C_V+R$, $\gamma=C_p/C_V$
Adiabat: $pV^\gamma=$ konst, $TV^{\gamma-1}=$ konst.
Varmemaskin: $e=\frac{W}{Q_H}=1+\frac{Q_C}{Q_H}=1-\left|\frac{Q_C}{Q_H}\right|$
Kjølemaskin: $K=\left|\frac{Q_C}{W}\right|=\frac{|Q_C|}{|Q_H|-|Q_C|}$
$e_{\text{Carnot}}=1-T_C/T_H$, $e_{\text{Otto}}=1-1/r^{\gamma-1}$, $K_{\text{Carnot}}=\frac{T_C}{T_H-T_C}$
Entropi: $\mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}Q}{T}$, $S=\int_1^2\frac{\mathrm{d}Q}{T}$ (langs reversibel prosess)

5 Elektrisitet

Coulomb:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$, $\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$
Fluks gjennom flate, S: $\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$
Gauss lov:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \quad \text{(lukket flate } S\text{)}$$

Kapasitans: $C = \frac{Q}{\Delta V}$. For platekondensator: $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$, $U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}Q^2/C$
Energi per volum i elektrisk felt: $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$
Ohms lov:

$$\vec{E} = \rho\vec{j}$$
$$V = RI$$

Elektrisk effekt: $P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{V\Delta Q}{\Delta t} = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$
Kirchhoffs regler:

$$1. \sum_j I_j = 0 \text{ i alle knutepunkt}$$
$$2. \sum \text{spenning} = 0 \text{ for alle lukkede sløyfer}$$

Oppladning av kondensator i RC-krets: $Q(t) = \varepsilon C(1 - \mathrm{e}^{-t/RC})$,
$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\mathrm{e}^{-t/RC}$
Utladning av kondensator i RC-krets: $Q(t) = \varepsilon C\mathrm{e}^{-t/RC}$, $I(t) = -\frac{\varepsilon}{R}\mathrm{e}^{-t/RC}$
Kretsens tidskonstant: $\tau = RC$

NOREGS TEKNISK-
NATURVITSKAPLEGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Arne Løhre Grimsmo
Telefon: 91 33 38 72

EKSAMEN TFY4102 FYSIKK
Fredag 10. juni 2011 kl. 0900 - 1300
Nynorsk

Hjelpemiddel: C

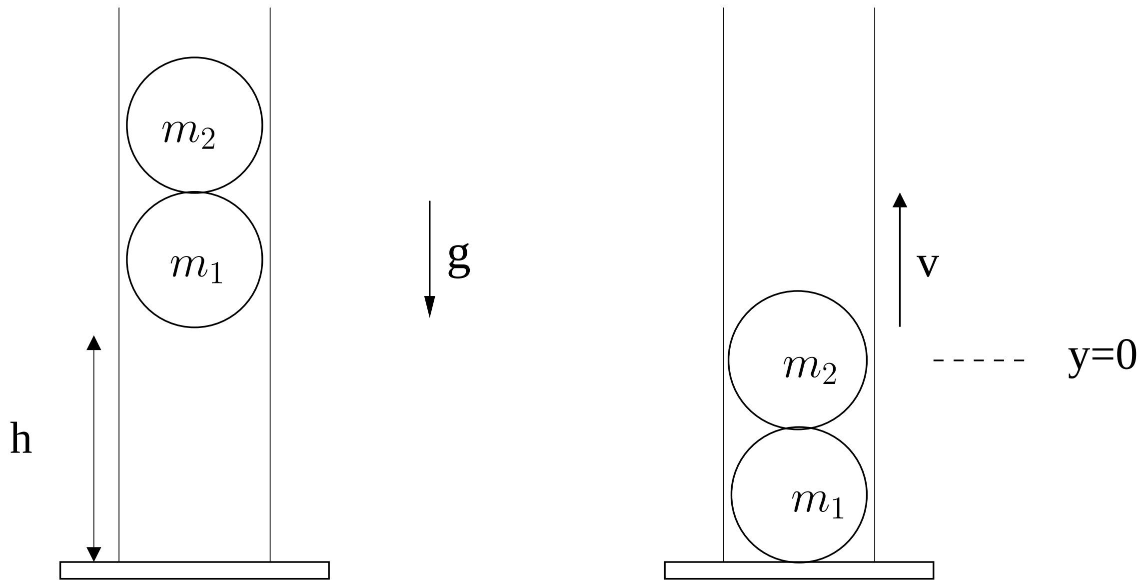
- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- Typegodkjend kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidd av NTNU. (Citizen SR-270X eller HP30S.)

Side 2 – 5: Oppgåver
Side 6 – 8: Formelsamling

Prøva består av 4 oppgåver, i alt 16 deloppgåver. Kvar deloppgåve vil i utgangspunktet telja like mykje på sluttkarakteren.

Sensuren kjem rundt 4. juli 2011.

Oppgåve 1.



To ballar vert sleppt samstundes nedover eit røyr. Sjå bort ifrå luftmotstand og eventuell friksjon mot røyret. Den nedste ballen har masse m_1 og den øvste har masse $m_2 < m_1$. Ballane vert sleppt, med null starthastigheit, frå ei høgd h over bakken, som synt i figuren. Alle kollisjonar er i denne oppgåva fullstendig *elastiske*, og skjer så raskt at vi kan sjå på dei som instantane. For å sjå på dette problemet lønar det seg å dele det opp i to støyt som skjer umiddelbart etter kvarandre: Først støyten mellom den nedste ballen og bakken, og så ein støyt mellom den nedste ballen og den øvste. Følgjande storleikar kan du anta er kjende i denne oppgåva: h, m_1, m_2 og tyngdeakselerasjonen g.

a) Bestem den nedste ballen sin hastigheit v_0 rett *før* støyten mot bakken. Kva er dens hastigheit rett *etter* støyten mot bakken?

b) Kva er endringa i rørslemengda til den nedste ballen i denne støyten? Forklar korleis bevaring av rørslemengd kan vera ivareteke.

c) Umiddelbart etter at nedste ball har fullført støyten mot bakken kolliderer dei to ballane med kvarandre. Syn at den øvste ballen sin hastigheit v rett etter kollisjonen blir

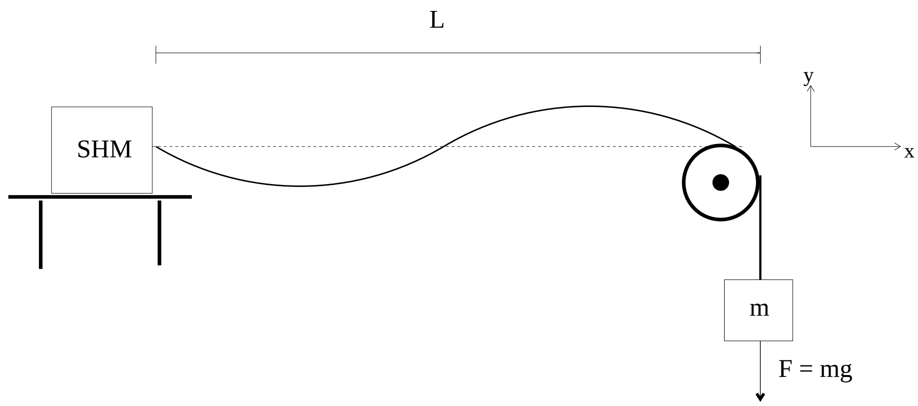
$$v = \frac{Nm_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,|v_0|,$$

og bestem på det viset det positive heiltalet N.

d) Finn og ut kor høgt, y, den vil sprette. Kva er den maksimale høgda y for grensetilfellet der m_1 er mykje større enn m_2?

Oppgåve 2.

I figuren under ser vi ei skjematisk teikning av eit forsøk som demonstrerer ståande bølgjer på ein streng.



I den eine enden av strengen er det ei bølgjekjeld, beteikna SHM ("Simple Harmonic Oscillator") i figuren, som genererer harmoniske bølgjer på strengen med frekvens f. I den andre enden går strengen over ei trinse, og er festa i eit lodd med masse m. Strengen si lengd er L og den har massetettleik μ. Følgjande storleikar kan du anta er kjende i denne oppgåva: L, m, g, f, μ.

a) Kva er bølgjetalet k og bølgjelengda λ for bølgjene på strengen?

b) Ein superposisjon av ei bølgje $y_1(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$ som propagerer mot høgre, og ei bølgje $y_2(x,t) = y_0 \sin(kx + \omega t)$ som propagerer mot venstre, resulterer i ei ståande bølgje $y(x,t) = A(x) \cos \omega t$, dvs. ein harmonisk svingning med posisjonsavhengig amplitude $A(x)$. Syn dette, og bestem på det viset $A(x)$. (Tips: $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$.)

c) Vi ser nå på ståande bølgjer på strengen i forsøket beskreve ovanfor. Anta at utsvinget er null i begge ender, dvs. for $x = 0$ og $x = L$. Bestem dei moglege bølgjetala k_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ for slike ståande bølgjer.

d) Vi kan bruke dette oppsettet som eit enkelt strengeinstrument. Anta at lengda på strengen er 1 meter, og massen av strengen er 0.5 gram. Vi ynskjer å "stemme" instrumentet vårt ved å variere massen til loddet m. Kor stor må m vera for at grunntonen (dvs. den ståande bølgjen med lågast frekvens) skal bli 440 Hz?

Oppgåve 3.

Forbrenninga i ein bensinmotor kan tilnærma beskrivast av følgjande sykliske prosess:

1. Sylinderen er fyld med ei luft-bensin blanding som vert komprimert adiabatisk (inga varmeutveksling).
2. Drivstoffet vert antent, og trykket og temperaturen auker, medan volumet vert halde konstant (isokor).
3. Deretter ekspanderer gassen adiabatisk, og stempelet vert trykt ut att til vi når det maksimale volumet vi starta med i steg 1.
4. Eksos vert sleppt ut, slik at gassen vert kjølt ned. Trykket og temperaturen går ned, medan volumet vert halde konstant (isokor), til vi når same trykk og volum som syklusen starta med.

La det minste volumet i syklusen vera V og det største rV. Anta at luft-bensin blandinga kan betraktast som ein ideell gass med adiabatkonstant γ. Temperaturen i starten på kvart steg i prosessen vert beteikna henholdsvis T_1, T_2, T_3 og T_4.

a) Skisser denne syklusen i eit pV-diagram.

Varmeutvekslinga i denne syklusen skjer i steg 2 og 4. Kall varmen som vert tilført systemet i steg 2 for Q_H og varmen som vert avgitt av systemet i steg 4 for $|Q_C|$ ($Q_C < 0$).

b) Syn at forholdet Q_C/Q_H kan skrivast på forma

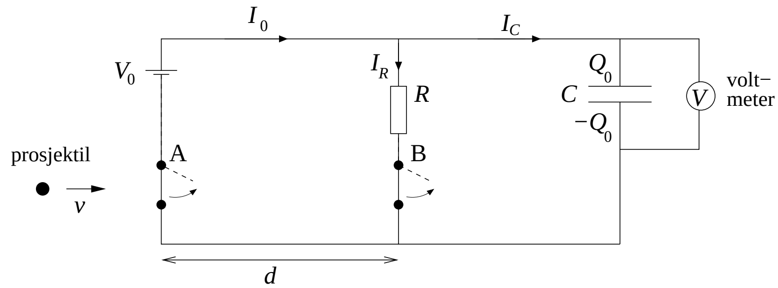
$$\frac{Q_C}{Q_H} = \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}.$$

c) Ta utgangspunkt i uttrykket i punkt b) og bestem effektiviteten e for syklusen, uttrykt ved adiabatkonstanten γ og kompresjonsforholdet r.

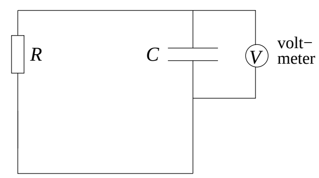
d) Anta at den sykliske prosessen sin høgaste og lågaste temperatur er spesifisert. Bruk Carnotprosessen sin spesielle status til å bestemme det maksimale teoretiske kompresjonsforholdet r.

Oppgåve 4.

Krinsen i figuren skal brukast til å måle farten til eit prosjektil:



Spenningskjelda V_0 er kopla til ein kondensator med kapasitans C og ein motstand med resistans R som synt i figuren. Eit voltmeter (V) måler spenninga over C. Det går ein stasjonær (dvs tidsuavhengig) straum i krinsen i det skuddet vert avfyrt. Ved tidspunktet $t = 0$ treffer prosjektilet brytaren A slik at spenningskjelda vert kopla ut:



Frå og med $t = 0$ avtek ladningen på kondensatoren eksponentielt med tida,

$$Q(t) = Q_0 \, e^{-t/\tau},$$

inntil prosjektilet treff brytaren B ved tidspunktet $t = T$, slik at straumen i krinsen stoppar. Avstanden frå A til B er d. Storleikane V_0, C, R og d er å betrakta som kjende storleikar i denne oppgåva.

a) Finn uttrykk for straumane I_0, I_R og I_C samt kondensatorladningen Q_0, for $t < 0$, dvs før prosjektilet treff A. (Sjå figur øvst.)

b) Bruk Kirchhoffs spenningsregel til å skrive ned differensiallikninga for kondensatorladningen $Q(t)$ for $0 < t < T$. Syn at uttrykkjet som er oppgjeve for $Q(t)$ ovanfor er ei løysing av denne likninga, og bestem på det viset krinsen sin tidskonstant τ.

c) Kva blir spenninga $V(t)$ som målast med voltmeteret? Skisser $V(t)$ for $-T < t < 2T$.

d) Anta at krinsen har komponentar med talverdiane $R = 1.0$ kΩ og $C = 10$ μF, og at spenningskjelda er $V_0 = 12.00$ V. Avstanden mellom dei to brytarane er $d = 5.0$ m. Etter $t = T$ syner voltmeteret 6.16 V. Kva var prosjektilet sin hastigheit v?

(Eit ideelt voltmeter måler potensialforskjellen mellom to punkter i ein krins utan å påverke krinsen forøvrig. Det går ingen straum gjennom eit ideelt voltmeter.)

Formelliste

1 Fysiske konstanter

$N_A = 6.0221 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}	$k_B = 1.3807 \cdot 10^{-23}$ J/K	$R = N_A k_B = 8.3145$ J mol^{-1} K^{-1}
0°C= 273.15K	$\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}$ C^2/Nm^2	$e = 1.6022 \cdot 10^{-19}$C
$c = 2.9979 \cdot 10^8$ m/s	$g = 9.81$ m/s^2	$G = 6.6742 \cdot 10^{-11}$N(m/kg)^2

Merk: k_B har også blitt skrevet som bare k i boka og i forelesningene.

2 Mekanikk

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{p} = m\vec{v} \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

Konstant akselerasjon a:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v(t) &= v_0 + at \\ a(t) &= a \end{aligned}$$

Arbeid og energi:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int \mathrm{d}W = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\ &= K_B - K_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \\ K &= \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

Total energi $E = K + U$ hvor $U = U(\vec{r})$ = potensiell energi. For tyngdekraft: $U = mgh$, og for fjærkraft: $U = \frac{1}{2}kx^2$. $E = K + U$ = konstant, <u>hvis kraften er konservativ</u>.

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\mathbf{k}$$

Effekt: $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$
Gravitasjon: $F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, $U_g = -G\frac{m_1 m_2}{r}$
Overflatefriksjon: $f_k = \mu_k n$, $f_s \leq \mu_s n$
Støt: $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ = summen av <u>eksterne</u> krefter $= 0 \Rightarrow \vec{p}_{\text{før}} = \vec{p}_{\text{etter}}$, kin. energi i støt: $K_{\text{etter}} = K_{\text{før}} + Q$, $Q < 0$ uelastisk, $Q = 0$ elastisk, $Q > 0$ superelastisk
Impuls: $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$
Sirkelbevegelse: Vinkelhastighet $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = v/R$. Sentripetalakselerasjon: $a = v^2/R = \omega^2 R$
Hookes lov: $F_x = -kx$

3 Svingninger og bølger

Udempet svingning:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad T = 2\pi/\omega_0, \quad f = 1/T$$
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi), \quad E = \frac{1}{2}kA^2$$

Dempet svingning: $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$
For $\frac{b}{2m} < \omega_0$ ("underkritisk"): $x(t) = A\mathrm{e}^{-(b/2m)t}\cos(\omega t + \phi)$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (b/2m)^2}$
Tvungne svingninger: $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = F_{\max}\cos(\omega_d t)$, amplitude: $A = \frac{F_{\max}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2) + b^2\omega_d^2}}$
Bølgeligningen:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad v = \text{bølgehastighet}$$

Periodisk bølge: $y(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t)$, $v = |v| = \omega/k = \lambda/T$
Streng: $v = \sqrt{F/\mu}$, μ = massetetthet [kg/m]
Stående bølger på streng: $L = n\lambda_n/2$, $f_n = v/\lambda_n = n\frac{v}{2L}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
Lyd: $v = \sqrt{B/\rho}$, B = bulkmodulus, ρ = massetetthet [kg/m^3]
Decibel skalaen: $\beta = 10\log_{10}(I/I_0)$, $I = P/A$ = effekt/areal = intensitet, og $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2
Dopplereffekt (positiv hastighetsretn. fra lytter (L) til kilde (S)): $\frac{f_L}{v+v_L} = \frac{f_S}{v+v_S}$
Dobbel spalte eksperimentet, konstruktiv interferens: $d\sin\theta = m\lambda$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$
Diffraksjon fra spalte, destruktiv interferens: $\sin\theta = m\lambda/a$, $m = \pm1, \pm2, \ldots$

4 Termisk fysikk

n = antall mol, $N = nN_A$ = antall molekyler, f = antall frihetsgrader, k_B = Boltzmanns konstant (k_B har også blitt skrevet som bare k i boka og i forelesningene)
Faseovergang: $Q = \pm mL$, $L = L_f$ for smeltepunkt eller L_v for kokepunkt
Varmeoverføring: $H = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$, varmestråling: $H = Ae\sigma T^4$
$\Delta U = Q - W$, $c = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \to \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$, $C = \frac{1}{n}\frac{\Delta Q}{\Delta T} \to \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}$
Arbeid: $\mathrm{d}W = p\,\mathrm{d}V \Rightarrow W = \int_1^2 p\,\mathrm{d}V$
Ideell gass: $pV = nRT = Nk_BT$, $pV = \frac{2}{3}K$, $K = N(\frac{1}{2}m\bar{v}^2)$ = kin. energi, $\mathrm{d}U = nC_V\,\mathrm{d}T$
Ekvipartisjonsprinsippet:
Legg til $\frac{1}{2}k_BT$ til den kinetiske energien <u>per frihetsgrad per molekyl</u> $\Rightarrow K = fN(\frac{1}{2}k_BT)$, $C_V = f\frac{1}{2}R$, $C_p = C_V + R$, $\gamma = C_p/C_V$
Adiabat: pV^γ = konst, $TV^{\gamma-1}$ = konst.
Varmemaskin: $e = \frac{W}{Q_H} = 1 + \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \left|\frac{Q_C}{Q_H}\right|$
Kjølemaskin: $K = \left|\frac{Q_C}{W}\right| = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|}$
$e_{\text{Carnot}} = 1 - T_C/T_H$, $e_{\text{Otto}} = 1 - 1/r^{\gamma-1}$, $K_{\text{Carnot}} = \frac{T_C}{T_H - T_C}$
Entropi: $\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}Q}{T}$, $S = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T}$ (langs reversibel prosess)

5 Elektrisitet

Coulomb:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$, $\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$
Fluks gjennom flate, S: $\Phi = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$
Gauss lov:

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} \quad \text{(lukket flate } S\text{)}$$

Kapasitans: $C = \frac{Q}{\Delta V}$. For platekondensator: $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$, $U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}Q^2/C$
Energi per volum i elektrisk felt: $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$
Ohms lov:

$$\vec{E} = \rho\vec{j}$$
$$V = RI$$

Elektrisk effekt: $P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{V\Delta Q}{\Delta t} = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}$
Kirchhoffs regler:

$$1.\ \sum_j I_j = 0 \text{ i alle knutepunkt}$$
$$2.\ \sum \text{spenning} = 0 \text{ for alle lukkede sløyfer}$$

Oppladning av kondensator i RC-krets: $Q(t) = \varepsilon C(1 - \mathrm{e}^{-t/RC})$,
$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\mathrm{e}^{-t/RC}$
Utladning av kondensator i RC-krets: $Q(t) = \varepsilon C\mathrm{e}^{-t/RC}$, $I(t) = -\frac{\varepsilon}{R}\mathrm{e}^{-t/RC}$
Kretsens tidskonstant: $\tau = RC$