Løsningsforslag EKSAMEN TFY4102 FYSIKK
Fredag 10. juni 2011

Oppgave 1.

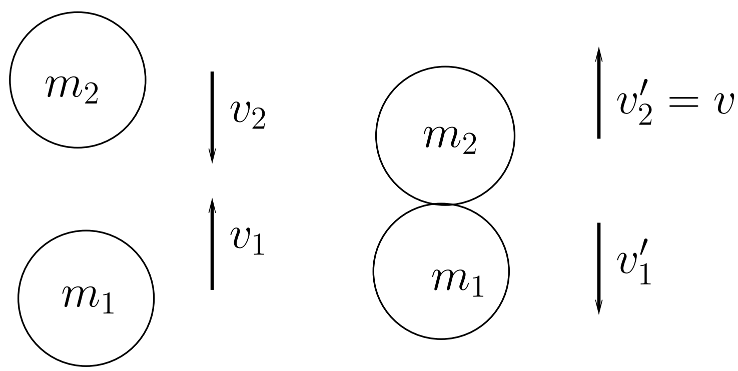
a) Vi velger her, og i resten av oppgaven, positiv retning oppover. Dermed gir energibevaring

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_0^2$$
$$\Rightarrow v_0 = -\sqrt{2gh}.$$

Rett etter støtet har m_1 hastighet $v_1 = -v_0 = \sqrt{2gh}$. Motsatt valg av positiv retning, eller å bare oppgi absoluttverdien til hastighetene, vil også gi full uttelling på denne oppgaven.

b) Endringen i bevegelsesmengde for m_1 er $\Delta p_1 = 2m_1|v_0|$. Bevaring av bevegelsesmengde er ivaretatt ved at bakken tar opp en endring $\Delta p_{\text{bakke}} = -2m_1|v_0|$. (Massen til bakken regnes som uendelig stor, noe som medfører at hastigheten til bakken er null både før og etter støtet.)

c) I støtet mellom de to ballene bruker vi bevaring av både bevegelsesmengde og energi. Vi velger fortsatt positiv retning oppover, og angir hastigheter som vist i figuren under.



v_1 er som funnet i a) lik $v_1 = -v_0 = \sqrt{2gh}$. v_2 er like stor men motsatt rettet, altså $v_2 = -v_1 = v_0 = -\sqrt{2gh}$, siden ballene har falt like langt. $v_2' = v$ og v_1' er ukjente. Merk at vi har tegnet v_1' med retning nedover, men hvilken vei den går vil egentlig være avhengig av de to massene.
Bevaring av bevegelsesmengde:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$
$$\Rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v. \tag{1}$$

Energibevaring:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$
$$\Rightarrow m_1 v_1^2 + m_2 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v^2. \tag{2}$$

Vi flytter om litt:

$$\begin{aligned}
(1) &\Rightarrow m_1(v_1 - v_1') = m_2(v + v_1) \\
(2) &\Rightarrow m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v^2 - v_1^2) \\
&\Rightarrow m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v - v_1)(v + v_1).
\end{aligned}$$

Ved å dele den siste ligningen på den første får vi

$$\begin{aligned}
v_1 + v_1' &= v - v_1 \\
\Rightarrow v_1' &= v - 2v_1.
\end{aligned}$$

Dette setter vi inn i den opprinnelige ligning (1):

$$\begin{aligned}
m_1 v_1 - m_2 v_1 &= m_1(v - 2v_1) + m_2 v \\
\Rightarrow (m_1 - m_2)v_1 &= (m_1 + m_2)v - 2m_1 v_1 \\
\Rightarrow v &= \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}|v_0|.
\end{aligned}$$

Så konstanten N er altså lik $N = 3$.

d) Vi bruker energibevaring som i oppgave a).

$$\begin{aligned}
m_2 g y &= \frac{1}{2} m_2 v^2 \\
\Rightarrow y &= \frac{1}{2g}\left(\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \underbrace{|v_0|^2}_{=2gh} \\
&= \left(\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 h.
\end{aligned}$$

Når $m_1 \gg m_2$ får vi $y \to (3m_1/m_1)^2 h = 9h$.

Oppgave 2.

a) Bølgetallet:

$$\begin{aligned} v = \frac{\omega}{k} &= \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}, \\ \omega &= 2\pi f \\ \Rightarrow k &= \frac{\omega}{v} = 2\pi f \sqrt{\frac{\mu}{mg}}. \end{aligned}$$

Bølgelengden:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{T} &= \lambda f = v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{1}{f}\sqrt{\frac{mg}{\mu}}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_0 \sin(kx - \omega t) + y_0 \sin(kx + \omega t) \\ &= y_0\{\sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t\} \\ &= 2y_0 \sin kx \cos \omega t. \end{aligned}$$

Altså har vi $A(x) = 2y_0 \sin kx$.

c) Vi skal ha $y(0,t) = 0$ og $y(L,t) = 0$ for alle tider t.

$$\begin{aligned} y(0,t) = 0 &\Rightarrow A(0) = 2y_0 \sin 0 = 0 \qquad \text{Ok.} \\ y(L,t) = 0 &\Rightarrow A(L) = 2y_0 \sin kL = 0 \\ &\Rightarrow kL = n\pi. \end{aligned}$$

Altså, $k_n = n\pi/L$ med $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Alternativ løsning: Ved å innse at vi kan bruke formelen $L = n\lambda_n/2$ fra formellisten, og at $\lambda = 2\pi/k$ får vi

$$\begin{aligned} L &= n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{k_n} \\ \Rightarrow k_n &= \frac{n\pi}{L}. \end{aligned}$$

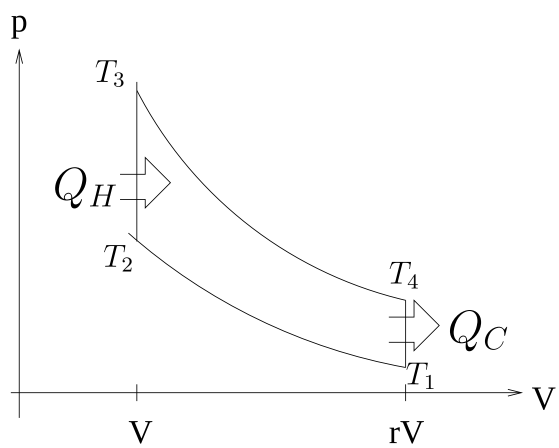
d) Fra formellisten har vi at $f_n = nv/2L$, som ved å sette inn for v gir

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{mg}{\mu}} \\ \Rightarrow m &= \frac{4L^2}{n^2} f_n^2 \frac{\mu}{g}. \end{aligned}$$

Grunntonen fås ved å sette $n = 1$. Dermed, $m = 4 \cdot 1^2 \cdot 440^2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3}/9.81$ kg $= 39.5$ kg.

Oppgave 3.

a)



Se også figur 20.6 i Young and Freedman. (Det ble ikke bedt om å tegne inn Q_H og Q_C eller temperaturene, så man blir ikke trukket noe på å ikke ha de med.)

b) Fra definisjonen på molar varmekapasitet får vi når vi ser på de to isokorene

$$Q_H = nC_V(T_3 - T_2)$$
$$Q_C = nC_V(T_1 - T_4).$$

Dermed,

$$\frac{Q_C}{Q_H} = \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$$

c)

$$e = 1 + \frac{Q_C}{Q_H} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}.$$

Bruker at steg 1 og 3 er adiabater. For steg 1:

$$T_1(rV)^{\gamma-1} = T_2V^{\gamma-1}$$
$$\Rightarrow T_2 = T_1r^{\gamma-1}.$$

Og for steg 3:

$$T_3V^{\gamma-1} = T_4(rV)^{\gamma-1}$$
$$\Rightarrow T_3 = T_4r^{\gamma-1}.$$

Dermed,

$$e = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_4 r^{\gamma-1} - T_1 r^{\gamma-1}} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{(T_4 - T_1) r^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}.$$

Denne syklusen er den såkalte Otto-syklusen, og vi kan kjenne igjen uttrykket for effektiviteten fra formellisten.

d) Ingen varmemaskin kan være mer effektiv enn Carnot-maskinen, og vi har derfor

$$\begin{aligned}
e &\leq e_{\text{Carnot}} \\
1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} &\leq 1 - \frac{T_C}{T_H} \\
r^{\gamma-1} &\leq \frac{T_H}{T_C} \\
r &\leq \left(\frac{T_H}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.
\end{aligned}$$

Oppgave 4.

a) Før $t = 0$ har vi stasjonære forhold i kretsen, med spenningsfall $V_R = V_0$ over motstanden og $V_C = V_0$ over kondensatoren. Det går ingen likestrøm gjennom en kondensator, så $I_C = 0$. Dermed må vi ha $I_R = I_0 = V_0/R$. Fra definisjonen av kapasitans C har vi $Q_0 = V_0 C$.

b) Ved $t = 0$ brytes kretsen i A, og vi står igjen med en krets med R og C. La oss bruke Kirchhoffs spenningsregel og gå (for eksempel) med klokka rundt kretsen og summere spenningsfall med riktig fortegn. Spenningsfallet over motstanden er da $-RI_R = -R(-dQ/dt) = +RdQ/dt$, i følge Ohms lov. Spenningsfallet over kondensatoren er Q/C. Summen av disse to spenningsfallene må i følge Kirchhoffs spenningsregel være lik null:

$$+R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Innsetting av den oppgitte formen på løsningen,

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau},$$

gir nå ligningen

$$\left(-\frac{R}{\tau} + \frac{1}{C}\right) Q_0 e^{-t/\tau} = 0,$$

som viser at den oppgitte $Q(t)$ er en løsning når $\tau = RC$.

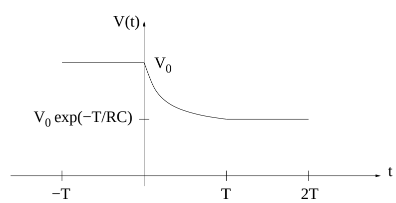
c) Fra og med $t = 0$ er kondensatorladningen $Q(t) = Q_0 \exp(-t/RC)$, med $Q_0 = V_0 C$. Voltmeteret måler spenningen over kondensatoren, og blir

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_0 e^{-t/RC}.$$

Dette uttrykket vil gjelde fram til $t = T$. Da stopper strømmen, dvs Q endrer seg ikke lenger, og voltmeteret viser den konstante spenningen

$$V(t > T) = V_0 e^{-T/RC}.$$

Skisse av kondensatorspenningen $V(t)$:



d) I løpet av tiden T har prosjektilet tilbakelagt en distanse d, slik at hastigheten er

$$v = d/T$$

Vi løser ut for T i uttrykket for $V(t > T)$ og setter inn tallverdier:

$$T = RC \ln \frac{V_0}{V(t > T)} = 1000 \cdot 10^{-5} \cdot \ln \frac{12.00}{6.16} = 6.668 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Prosjektilets hastighet blir

$$v = d/T = 5.0/(6.668 \cdot 10^{-3}) = 750 \text{ m/s}.$$