BOKMÅL

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

EKSAMEN i
TFY4108 FYSIKK

Eksamensdato: Fredag 14. desember 2012
Eksamenstid: 09:00 - 13:00

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk, John Ove Fjærestad, tlf. 979 40 036 / 7359 3448

Tillatte hjelpemidler (kode C):
Godkjent bestemt enkel kalkulator med tomt minne.
K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språkutgaver).

Sensurdato: Innen 14. januar 2013.

Prosenttallet som står i parentes etter hvert oppgavenummer indikerer hvor mye oppgaven i utgangspunktet blir vektlagt i bedømmelsen.
I mange tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkt selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

Oppgave 1 er om kvantemekanikk. Formellista for denne oppgaven følger umiddelbart etter oppgaveteksten. Oppgave 2-5 er om klassisk mekanikk. Formellista for denne delen av eksamen er i et vedlegg bakerst i eksamenssettet.

Noen generelle merknader:
- Symboler blir skrevet i kursiv (f.eks. m for en masse), mens enheter blir skrevet uten kursiv (f.eks. m for meter)
- Ved tallsvar kreves både tall og enhet.

Oppgave 1. (teller 25 %)

En partikkel med masse m er i en potensialbrønn. Den potensielle energien er

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq x \leq L, \\ \infty & \text{for } x < 0 \text{ og } x > L. \end{cases}$$

Den normerte bølgefunksjonen for den stasjonære tilstanden med lavest energi (grunntilstanden) har romlig del

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} & \text{for } 0 \leq x \leq L, \\ 0 & \text{for } x < 0 \text{ og } x > L. \end{cases} \tag{1}$$

a) Bestem grunntilstandsenergien.

b) Bestem sannsynligheten for å finne partikkelen i posisjonsintervallet mellom $x = L/4$ og $x = 3L/4$.

c) Det blir oppgitt at for grunntilstanden er (i) $\langle x \rangle = L/2$ og (ii) $\langle p \rangle = 0$. Uten å eksplisitt regne ut noe integral, gi et argument for å underbygge enten (i) eller (ii).

d) Regn ut $\langle x^2 \rangle$ og $\langle p^2 \rangle$ for grunntilstanden. Finn usikkerhetene Δx og Δp.

e) Bestem verdien av produktet $\Delta x \, \Delta p$. Kommentér resultatet.

Oppgitte resultater for kvantemekanikk:

Operatorer for observabler:

Observabel	Operator
Posisjon	$\hat{x} = x$
Bevegelsesmengde	$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$
Total energi	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$
Generell observabel $F(x,p)$	$\hat{F} = F(\hat{x}, \hat{p})$

Tidsavhengig Schrödingerligning (TASL): $\hat{H}\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$.

Stasjonær tilstand: $\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$.

Tidsuavhengig Schrödingerligning (TUSL): $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$.

Forventningsverdi: $\langle F \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \Psi^*(x,t) \, \hat{F} \, \Psi(x,t)$.

Usikkerhet: $\Delta F = \sqrt{\langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2}$.

Heisenbergs usikkerhetsrelasjon: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$.

Egenverdiligning: $\hat{F}\Theta_\alpha(x) = f_\alpha \Theta_\alpha(x)$.

Noen integraler:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 z \, dz &= \frac{1}{2}(z - \sin z \cos z) + C \\ \int z^2 \sin^2 z \, dz &= \frac{1}{24}[4z^3 + (3 - 6z^2) \sin 2z - 6z \cos 2z] + C \end{aligned}$$

Oppgave 2. **(teller 15 %)**

En partikkel med masse m blir skutt inn mot et medium med en fart v_0. Inne i mediet blir farten til partikkelen dempet som

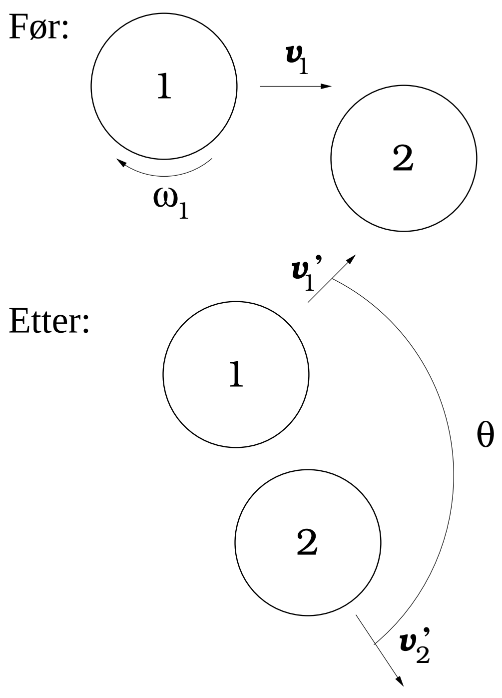
$$v_x(t) = v_0 \, e^{-bt/m}$$

der b er en konstant.

a) Finn et uttrykk for den kraften F_x som gir fartsdempningen. Kan du fra svaret gi en fysisk tolkning av størrelsen b?

b) Finn partikkelens posisjon $x(t)$ i mediet. Hvor langt klarer partikkelen å trenge inn i mediet?

Oppgave 3. **(teller 15 %)**

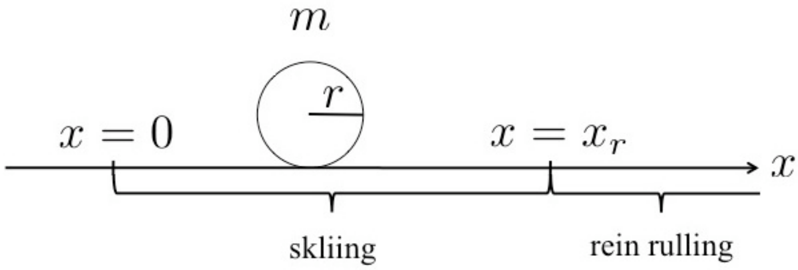


To identiske sirkulære skiver kolliderer på et friksjonsfritt underlag. Kollisjonen er (delvis) uelastisk. Før kollisjonen ligger skive 2 i ro mens skive 1 har hastighet $\vec{v}_1$. Etter kollisjonen har skive 1 og 2 hastigheter $\vec{v}\,'_1$ og $\vec{v}\,'_2$ (se figur, der vi ser systemet ovenfra).

a) Forklar hvorfor total kinetisk energi E_k for de to skivene ikke er bevart i kollisjonen. Forklar videre hvorfor total bevegelsesmengde $\vec{p}$ for de to skivene er bevart.

b) Ta utgangspunkt i bevaring av bevegelsesmengde (tips: kvadrer ligningen!) og vis at den kinetiske *translasjonsenergien* E_k^{trans} kan minke, øke, eller forbli uendret som følge av kollisjonen, avhengig av vinkelen θ mellom de to slutthastighetene (se figur). Hvordan vil du forklare at translasjonsenergien kan øke i en slik kollisjon?

Oppgave 4. **(teller 30 %)**



I denne oppgaven skal du analysere bevegelsen til en bowlingkule på en bowlingbane. Kula har masse m og radius r. Vi bruker posisjonen x til kulas massesenter for å spesifisere hvor kula er. Den kinetiske friksjonskoeffisienten er μ_k.

Etter å ha landet på underlaget (bowlingbana) ved posisjonen $x = 0$ med en fart $v_0 > 0$ men med null rotasjonshastighet, sklir kula på underlaget mens rotasjonshastigheten gradvis øker. Når kula kommer til posisjonen $x = x_r$ er sklifasen over og kula begynner å rulle rent med farten v_r (indeksen r står her for ren rulling).

a) Finn et uttrykk for akselerasjonen a til kula i sklifasen. Bestem hastigheten v som funksjon av tiden t når kula sklir.

b) Velg z-aksen inn i planet på figuren. Finn et uttrykk for vinkelakselerasjonen α_z i sklifasen. Bestem rotasjonshastigheten ω_z som funksjon av tiden t når kula sklir.

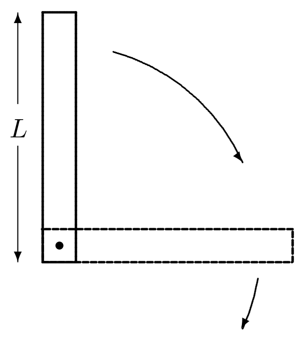
c) Bruk resultatene i a) og b) til å vise at kula begynner å rulle rent ved tiden $t_r = 2v_0/(7\mu_k g)$ etter at kula landet på underlaget. Bestem avstanden x_r. Vis at rullehastigheten er $v_r = (5/7)v_0$.

d) Se på totalspinnet $\vec{L}$ til kula, definert med punktet $x = 0$ på underlaget som referansepunkt. Med utgangspunkt i kreftene som virker på kula, vis at $\vec{L}$ er bevart under kulas bevegelse på underlaget.

e) La $L_z(x)$ være spinnet langs z-aksen når kulas massesenter har posisjon x. Bruk spinnbevaring til å sette opp en ligning $L_z(0) = L_z(x)$, og bruk denne til å gi en alternativ utledning av resultatet $v_r = (5/7)v_0$.

Oppgave 5. **(teller 15 %)**

En uniform (jevntykk) tynn stang har lengden L og massen M. Den er dreibar om en horisontal, friksjonsløs akse (z-aksen) som går gjennom den ene enden. Stanga blir frigjort fra ro (ved å gi den et neglisjerbart puff) i sin vertikale posisjon, og den vil da falle ned med en rotasjonsbevegelse. Prinsippet er vist i figuren, men her er ikke akslingen helt på enden av stanga og stanga er ikke tynn. Du kan anta som kjent at stangas treghetsmoment om aksen er $I = (1/3)ML^2$.



For det øyeblikket at stanga er i *horisontal* posisjon:

a) Bestem stangas vinkelfart ω.

b) Vis at størrelsen på stangas vinkelakselerasjon er $\alpha = \frac{3g}{2L}$.

Vedlegg: Formelliste for klassisk mekanikk

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent.

Noen fysiske konstanter:

$g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$ $c = 2,9997 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ $h = 6,63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$

SI-enheter:

Noen fundamentale SI-enheter: meter (m) sekund (s) kilogram (kg)

Noen avledete SI-enheter : newton (N) joule (J) watt (W) hertz (Hz)

Varianter: kWh = 3,6 MJ m/s = 3,6 km/h Ångström = Å= 10^{-10} m

Klassisk mekanikk:

$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(\vec{r}, t)$ der $\vec{p}(\vec{r}, t) = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ $\vec{F} = m\vec{a}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$

Konstant $\vec{\alpha}$: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\,(\theta - \theta_0)$

Newtons gravitasjonslov: $\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$ $E_\mathrm{p}(r) = -G\frac{M}{r}m$ $G = 6,673 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$

Arbeid: $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ Kinetisk energi: $E_\mathrm{K} = \frac{1}{2}mv^2$

$E_\mathrm{p}(\vec{r})$ = potensiell energi (tyngde: mgh, fjær: $\frac{1}{2}kx^2$) $E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + E_\mathrm{p}(\vec{r}) + \text{friksjonsarbeid} = \text{konstant}$

Konservativ kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_\mathrm{p}(\vec{r})$ f.eks. $F_x = -\frac{\partial}{\partial x}E_\mathrm{p}(x, y, z)$ Hookes lov (fjær): $F_x = -kx$

Tørr friksjon: $|F_\mathrm{f}| \leq \mu_\mathrm{s}\,F_\perp$ eller $|F_\mathrm{f}| = \mu_\mathrm{k}\,F_\perp$ Våt friksjon: $\vec{F}_\mathrm{f} = -k_\mathrm{f}\vec{v}$ eller $\vec{F}_\mathrm{f} = -bv^2\hat{v}$

Kraftmoment (dreiemoment): $\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$, med $\vec{r}_0$ som valgt referansepunkt Arbeid: $\mathrm{d}W = \tau\mathrm{d}\theta$

Betingelser for statisk likevekt: $\Sigma\vec{F}_i = \vec{0}$ $\Sigma\vec{\tau}_i = \vec{0}$, uansett valg av referansepunkt $\vec{r}_0$ i $\vec{\tau}_i$

Massesenter (tyngdepunkt): $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{r}_i \to \frac{1}{M}\int \vec{r}\,\mathrm{d}m$ $M = \sum m_i$

Kraftimpuls: $\int_{\Delta t} \vec{F}(t)\mathrm{d}t = m\Delta\vec{v}$ Alle støt: $\sum \vec{p}_i$ = konstant Elastisk støt: $\sum E_i$ = konstant

Vinkelhastighet: $\vec{\omega} = \omega\,\hat{\mathbf{k}}$ $|\,\vec{\omega}\,| = \omega = \dot{\phi}$ Vinkelakselerasjon: $\vec{\alpha} = \mathrm{d}\vec{\omega}/\mathrm{d}t$ $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \ddot{\phi}$

Sirkelbev.: $v = r\omega$ Sentripetalaks.: $\vec{a} = -v\omega\,\hat{\mathbf{r}} = -\frac{v^2}{r}\,\hat{\mathbf{r}} = -r\omega^2\,\hat{\mathbf{r}}$ Baneaks.: $a_\theta = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\,\alpha$

Spinn (dreieimpuls) og spinnsatsen: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ $\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}$, stive legemer: $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$ $\vec{\tau} = I\,\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$

Rotasjonsenergi: $E_\mathrm{k,rot} = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$,
der treghetsmoment $I \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum m_i r_i^2 \to \int r^2\mathrm{d}m$ med r = avstanden fra m_i ($\mathrm{d}m$) til rotasjonsaksen.

Med aksen gjennom massemiddelpunktet: $I \to I_0$, og da gjelder:
kule: $I_0 = \frac{2}{5}\,MR^2$ kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}\,MR^2$ sylinder/skive: $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ Åpen sylinder/ring: $I_0 = MR^2$
lang, tynn stav: $I_0 = \frac{1}{12}\,M\ell^2$ Parallellakseteoremet (Steiners sats): $I = I_0 + Mb^2$

Spinn (dreieimpuls): $\vec{L}_{\text{bane}} = M(\vec{R} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$, der $\vec{r}_0$ er det felles referansepunkt for $\vec{L}$ og $\vec{\tau}$, og tyngdepunktsbevegelsen er gitt av $(\vec{R}, \vec{V} = \mathrm{d}\vec{R}/\mathrm{d}t)$ Egenspinn: $\vec{L}_{\text{egen}} = I_0\,\vec{\omega}$

Med (sylinder)symmetriske faste legemer: $\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{bane}} + \vec{L}_{\text{egen}}$ $\quad \vec{\tau}_{\text{tot}} = \mathrm{d}\vec{L}_{\text{tot}}/\mathrm{d}t$

Udempet svingning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \qquad f_0 = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ $\qquad$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Tyngdependel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0, \quad \text{der} \sin\theta \approx \theta$ $\qquad$ Fysisk: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgd}{I}}$ $\quad$ Matematisk: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$

Dempet svingning: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\qquad$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m} \qquad \gamma = b/(2m)$

$\gamma < \omega_0$ Underkritisk dempet: $x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_{\mathrm{d}} t - \delta)$ $\quad$ med $\omega_{\mathrm{d}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\gamma > \omega_0$ Overkritisk dempet: $x(t) = A^{+}\mathrm{e}^{-\alpha^{(+)}t} + A^{-}\mathrm{e}^{-\alpha^{(-)}t}$ $\quad$ med $\alpha^{(\pm)} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Tvungne svingninger: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$, med (partikulær)løsning når $t \gg \gamma^{-1}$:

$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \delta)$, der $x_0(\omega) = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \qquad \tan\delta = \dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

"Rakettlikningen": $m(t)\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{Y}} + \beta\vec{u}_{\mathrm{ex}}$ $\quad$ der $\beta = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ og $\vec{u}_{\mathrm{ex}}$ = hast. utskutt masse relativ hovedmasse