Institutt for fysikk

Eksamensoppgave i TFY4108 Fysikk

Faglig kontakt under eksamen: Førsteamanuensis John Ove Fjærestad
Tlf.: 97 94 00 36

Eksamensdato: 16. august 2013
Eksamenstid (fra-til): 9-13
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C

Godkjent bestemt enkel kalkulator med tomt minne
K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språkutgaver)

Annen informasjon:

Prosenttallet som står i parentes etter hvert oppgavenummer indikerer hvor mye oppgaven i utgangspunktet blir vektlagt i bedømmelsen. I mange tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkt i en oppgave selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

Oppgave 1 er om kvantemekanikk. Formellisten for denne oppgaven følger umiddelbart etter oppgaveteksten. Oppgave 2-4 er om klassisk mekanikk. Formellisten for denne delen av eksamen er i et vedlegg bakerst i eksamenssettet.

Målform/språk: Bokmål
Antall sider (inkludert forside og vedlegg): 6

Kontrollert av:

Dato Sign

<u>Oppgave 1.</u> (teller 25 %)

Se på en partikkel med masse m i et éndimensjonalt system med potensiell energi gitt ved

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0, \\ -U_0 & \text{for } x > 0, \end{cases}$$

der $U_0 > 0$. Anta at partikkelen har en total energi $E > 0$.

a) Sett opp løsningene for den tidsuavhengige Schrödingerligningen for $x \leq 0$ og $x > 0$. Forklar hvordan de skal skjøtes sammen ved $x = 0$.

b) Finn uttrykk for refleksjons- og transmisjonskoeffisientene R og T for en planbølge som kommer inn fra venstre. Vurder rimeligheten av svaret for spesialtilfellet $U_0 \to 0$.

c) Kommenter kort hvordan resultatene for R og T du fant i (b) skiller seg fra det klassiske tilfellet, dvs. dersom den innkommende partikkelens oppførsel i det samme potensialet hadde vært bestemt av klassisk fysikk.

d) For hvilken verdi av E/U_0 er $R = T$?

<u>Oppgitte resultater for kvantemekanikk (du må selv avgjøre om de kan være nyttige):</u>

de Broglie relasjoner: $E = hf$, $p = h/\lambda$.

Operatorer for observabler:

Observabel	Operator
Posisjon	$\hat{x} = x$
Bevegelsesmengde	$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$
Total energi	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$
Generell observabel $F(x,p)$	$\hat{F} = F(\hat{x},\hat{p})$

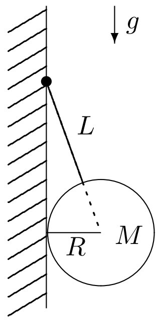
Tidsavhengig Schrödingerligning (TASL): $\hat{H}\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}$.

Stasjonær tilstand: $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$.

Tidsuavhengig Schrödingerligning (TUSL): $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$.

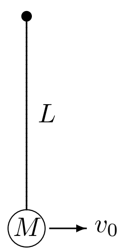
Refleksjonskoeffisient: $R = |B/A|^2$ der A og B er koeffisienter for innkommende og reflektert planbølge.

Oppgave 2. **(teller 20 %)**



a) En kule med radius R og masse M henger inn mot en vegg i en tynn snor av lengde L. Snorens forlengelse går gjennom kulens sentrum som vist i figuren. Tyngdens akselerasjon er g og det er ingen friksjon mellom vegg og kule.

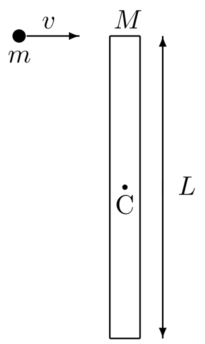
Finn snordraget S og kraften N på kulen fra veggen uttrykt ved gitte størrelser. Kommenter om svarene er rimelige for grensetilfellet $L \gg R$.



b) Anta nå at R er neglisjerbar (dvs. $L \gg R$) og at kulen henger fritt i tråden. Kulen gis en liten dult slik at den får en horisontal fart v_0 (se figur) og begynner å svinge frem og tilbake i en sirkelbane i vertikalplanet, med en maksimal utsvingsvinkel $\leq 90°$. Finn snordraget S uttrykt ved gitte størrelser når kula er på sitt høyeste punkt.

Oppgave 3. **(teller 20 %)**

En tynn stav med masse M og lengde L kan dreie seg i horisontalplanet uten friksjon om en fast vertikal akse gjennom massesenteret C. Staven, som opprinnelig er i ro, treffes av en kule med masse m og fart v. Kulen absorberes ved stavens ene ende (se figur som viser systemet ovenfra).



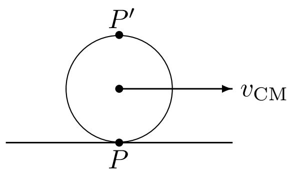
a) Spinnet om rotasjonsaksen er bevart. Hvorfor?

b) Vis at vinkelhastigheten ω av staven (med kule) etter absorbsjonen er

$$\omega = \frac{6mv}{(M+3m)L}.$$

c) Angi et tilnærmet uttrykk for ω som gjelder for $m \ll M$. Finn stavens rotasjonsenergi E_{rot} for dette spesielle tilfellet og sammenlign denne med kulens kinetiske energi før den treffer staven.

Oppgave 4. (teller 35 %)

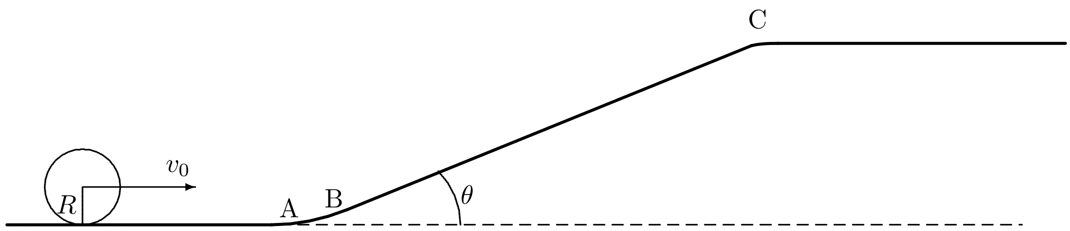


a) En massiv sylinder med masse M og radius R beveger seg på et flatt underlag. Hastigheten til massesenteret er v_{CM} (se figur). Angi hastighetene v_P til sylinderens kontaktpunkt P mot underlaget og $v_{P'}$ til sylinderens toppunkt P', når

i. sylinderen utfører en ren translasjonsbevegelse langs underlaget

ii. sylinderen utfører en ren rullebevegelse langs underlaget.

Vi lar nå den samme sylinderen rulle (rent) med $v_{\mathrm{CM}} = v_0$ mot et skråplan som danner en vinkel θ med underlaget. Overgangen til skråplanet mellom A og B er "myk", dvs. overgangens krumningsradius er større enn R. Ved C flater skråplanet av til flatt underlag. Friksjonskoeffisienten til underlaget er μ overalt. Ved ren rulling er mekanisk energi bevart.



b) Hva er retning og størrelse på akselerasjonen a og på friksjonskrafta F_{f}

i. på det horisontale underlaget fram til A

ii. på skråplanet mellom B og C.

c) Hva er den maksimale lengden L skråplanet kan ha for at sylinderen når toppen C? (Her kan du neglisjere strekningen AB.)

d) Forklar hvorfor sylinderens mekaniske energi er bevart ved ren rulling.

e) Vi har antatt at sylinderen ruller rent. Finn betingelsen for at dette er oppfylt, uttrykt ved gitte størrelser.

Vedlegg: Formelliste for klassisk mekanikk

Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent.

Noen fysiske konstanter:

$g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$ $c = 2,9997 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$ $h = 6,63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$

SI-enheter:

Noen fundamentale SI-enheter: meter (m) sekund (s) kilogram (kg)

Noen avledete SI-enheter : newton (N) joule (J) watt (W) hertz (Hz)

Varianter: kWh = 3,6 MJ m/s = 3,6 km/h Ångström = Å= 10^{-10} m

Klassisk mekanikk:

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(\vec{r},t)$ der $\vec{p}(\vec{r},t) = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ $\vec{F} = m\vec{a}$

Konstant $\vec{a}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)$

Konstant $\vec{\alpha}$: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\,(\theta - \theta_0)$

Newtons gravitasjonslov: $\vec{F} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$ $E_\mathrm{p}(r) = -G\dfrac{M}{r}m$ $G = 6,673 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$

Arbeid: $\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$ $W_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$ Kinetisk energi: $E_\mathrm{K} = \frac{1}{2}mv^2$

$E_\mathrm{p}(\vec{r})$ = potensiell energi (tyngde: mgh, fjær: $\frac{1}{2}kx^2$) $E = \dfrac{1}{2}m\vec{v}^2 + E_\mathrm{p}(\vec{r}) + \text{friksjonsarbeid} = \text{konstant}$

Konservativ kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_\mathrm{p}(\vec{r})$ f.eks. $F_x = -\dfrac{\partial}{\partial x}E_\mathrm{p}(x,y,z)$ Hookes lov (fjær): $F_x = -kx$

Tørr friksjon: $|F_\mathrm{f}| \le \mu_\mathrm{s}\,F_\perp$ eller $|F_\mathrm{f}| = \mu_\mathrm{k}\,F_\perp$ Våt friksjon: $\vec{F}_\mathrm{f} = -k_\mathrm{f}\vec{v}$ eller $\vec{F}_\mathrm{f} = -bv^2\hat{v}$

Kraftmoment (dreiemoment): $\vec{\tau} = (\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{F}$, med $\vec{r}_0$ som valgt referansepunkt Arbeid: $\mathrm{d}W = \tau\mathrm{d}\theta$

Betingelser for statisk likevekt: $\Sigma\vec{F}_i = \vec{0}$ $\Sigma\vec{\tau}_i = \vec{0}$, uansett valg av referansepunkt $\vec{r}_0$ i $\vec{\tau}_i$

Massesenter (tyngdepunkt): $\vec{R} = \dfrac{1}{M}\sum m_i\vec{r}_i \to \dfrac{1}{M}\displaystyle\int \vec{r}\,\mathrm{d}m$ $M = \sum m_i$

Kraftimpuls: $\int_{\Delta t}\vec{F}(t)\mathrm{d}t = m\Delta\vec{v}$ Alle støt: $\sum\vec{p}_i = \text{konstant}$ Elastisk støt: $\sum E_i = \text{konstant}$

Vinkelhastighet: $\vec{\omega} = \omega\,\hat{\mathbf{k}}$ $|\,\vec{\omega}\,| = \omega = \dot{\phi}$ Vinkelakselerasjon: $\vec{\alpha} = \mathrm{d}\vec{\omega}/\mathrm{d}t$ $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t = \ddot{\phi}$

Sirkelbev.: $v = r\omega$ Sentripetalaks.: $\vec{a} = -v\omega\,\hat{\mathbf{r}} = -\dfrac{v^2}{r}\,\hat{\mathbf{r}} = -r\omega^2\,\hat{\mathbf{r}}$ Baneaks.: $a_\theta = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\,\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\,\alpha$

Spinn (dreieimpuls) og spinnsatsen: $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ $\vec{\tau} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}$, stive legemer: $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$ $\vec{\tau} = I\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$

Rotasjonsenergi: $E_\mathrm{k,rot} = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$,
der treghetsmoment $I \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum m_i r_i^2 \to \int r^2\mathrm{d}m$ med r = avstanden fra m_i (dm) til rotasjonsaksen.

Med aksen gjennom massemiddelpunktet: $I \to I_0$, og da gjelder:
kule: $I_0 = \frac{2}{5}\,MR^2$ kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}\,MR^2$ sylinder/skive: $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ Åpen sylinder/ring: $I_0 = MR^2$
lang, tynn stav: $I_0 = \frac{1}{12}\,M\ell^2$ Parallellakseteoremet (Steiners sats): $I = I_0 + Mb^2$

Spinn (dreieimpuls): $\vec{L}_{\text{bane}} = M(\vec{R} - \vec{r}_0) \times \vec{V}$, der $\vec{r}_0$ er det felles referansepunkt for $\vec{L}$ og $\vec{\tau}$, og tyngdepunktsbevegelsen er gitt av $(\vec{R}, \vec{V} = \mathrm{d}\vec{R}/\mathrm{d}t)$ Egenspinn: $\vec{L}_{\text{egen}} = I_0 \vec{\omega}$

Med (sylinder)symmetriske faste legemer: $\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_{\text{bane}} + \vec{L}_{\text{egen}}$ $\quad \vec{\tau}_{\text{tot}} = \mathrm{d}\vec{L}_{\text{tot}}/\mathrm{d}t$

Udempet svingning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ $\quad f_0 = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ $\quad$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Tyngdependel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$, der $\sin\theta \approx \theta$ $\quad$ Fysisk: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgd}{I}}$ $\quad$ Matematisk: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$

Dempet svingning: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\quad$ Masse/fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ $\quad \gamma = b/(2m)$

$\gamma < \omega_0$ Underkritisk dempet: $x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos(\omega_{\mathrm{d}} t - \delta)$ $\quad$ med $\omega_{\mathrm{d}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
$\gamma > \omega_0$ Overkritisk dempet: $x(t) = A^{+}\mathrm{e}^{-\alpha^{(+)}t} + A^{-}\mathrm{e}^{-\alpha^{(-)}t}$ $\quad$ med $\alpha^{(\pm)} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Tvungne svingninger: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$, med (partikulær)løsning når $t \gg \gamma^{-1}$:

$x(t) = x_0\cos(\omega t - \delta)$, der $\quad x_0(\omega) = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$ $\quad \tan\delta = \dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

"Rakettlikningen": $m(t)\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{Y}} + \beta\vec{u}_{\text{ex}}$ $\quad$ der $\beta = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ og $\vec{u}_{\text{ex}}$ = hast. utskutt masse relativ hovedmasse