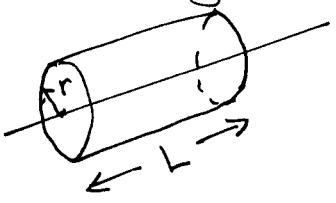
Eksamen TFY 4110, H2005 (09.12.05) (geopet)

Løsningsforslag

Oppgave 1

a Linjeladning med ladning pr lengdeenhet, λ.
Sylindersymmetri rundt linjen: $\vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$.
Derved gir Gauss:



$$\oint d\vec{A}\cdot\vec{E} = 2\pi r L\, E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \underline{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r}}$$

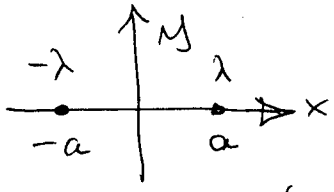
b $\vec{E} = -\nabla V$ (som definerer V på en konstant nær)
Med sylindersymmetri er $E(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$:

$$V(r) = -\int_R^r dr' E(r') = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln r'\right]_R^r$$

$R \leftarrow$ Valg: $V(R) = 0$

$$\underline{V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}}$$

c

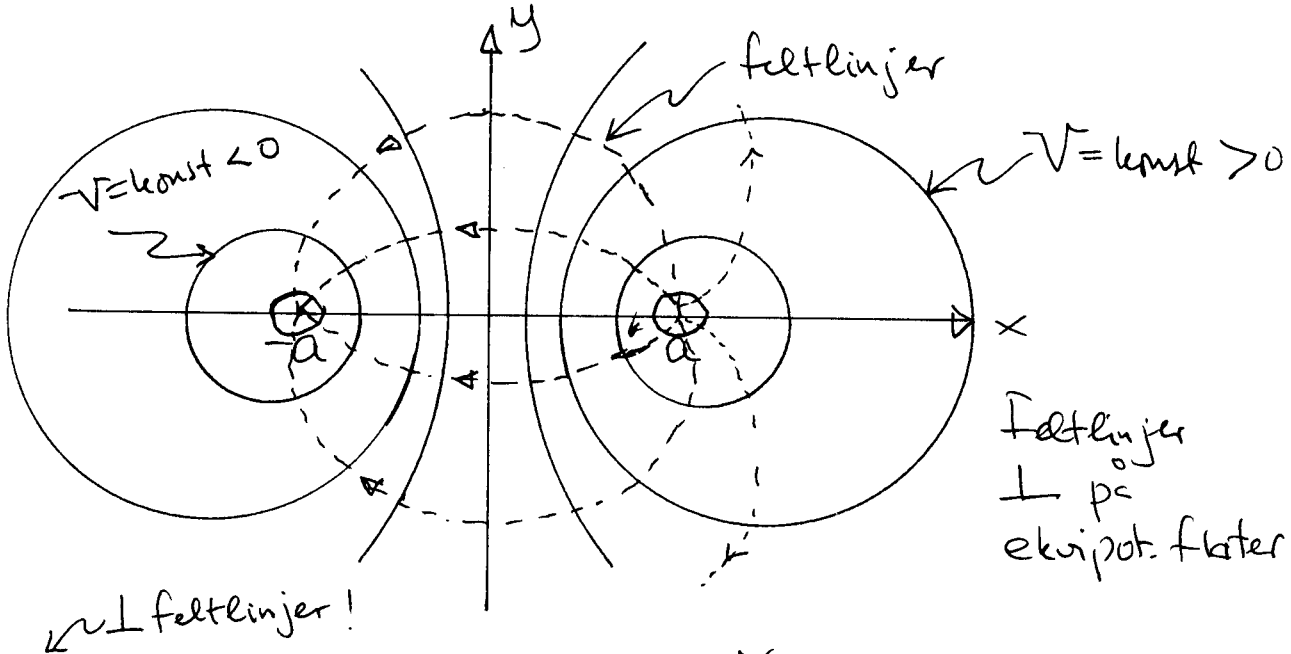


Her må "R" velges slik at $V=0$ velges for (i utgangspunktet) ett punkt. Naturlig valg: $V(0,0)=0 \Rightarrow R=a$. (tallverdi!)

Derved $$V(x,y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{a}{r_a} - \ln\frac{a}{r_{-a}}\right)$$

$$V(x,y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$$

d "Trykkfeil" i oppgavetekesten. Konstanten skulle ha vært skrevet som $\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln k^2$, i stedet for k^2.
Likevel, dette har ingen betydning for oppgaven (utover at k^2 nødvendigvis er positiv), siden det ikke var bedt om beregninger, bare skisser



Ekvipotensialflatene det. ved $V(x,y) = \text{konstant}$. $(=k^2)$
Med konstanten skrevet som $\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln k^2$ har en

$$V=\text{konst} \iff \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} = k^2$$

dette var det ikke spurt om!

Skrevet på denne måten er det lett å overbevise seg om at $V=\text{konst}$ gi sirkler i (x,y)-planet.

Fra skissen over ser en, uten regning, at $V(x,y)=0$
(i) når $x=0$, for alle y. (av symmetrigrunner)
(ii) når $r=\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$, uansett retning.

Oppgave 2

a Her kan en resonnere på flere presisjonsnivå. Kvalitativt viser figuren at når senderen beveger seg mot høyre og nærmer seg en stasjonær mottaker, vil bølgelengden minske. Siden $v = \lambda f$ (der v er lydfarten), vil da den mottatte frekvens øke.

Kvantitativt kan en (f.eks.) resonnere slik. Når senderen beveger seg mot høyre, blir bølgelengden til bølgene som sendes ut mot høyre

$$\lambda = \frac{v - v_S}{f_S}$$

Den mottatte frekvens må være $f_M = \frac{v}{\lambda}$, når mottakeren står i ro. Derved er

$$f_M = \frac{v}{v - v_S} f_S \qquad \text{qed.}$$

b Flaggermusen "måler" avstanden til objekter ved å observere <u>forsinkelsen</u> av reflekterte lydpulser. Med $v_S/v \ll 1$ og $v_M/v \ll 1$ (som sikkert er oppfylt for flaggermus og insekter) er avstanden gitt av forsinkelsen Δt som $s = v\Delta t/2$. Pulsens frekvensendring er $\Delta f = 2\frac{v_S - v_M}{v} f_S$ slik at den sier noe om $\vec{v}_M$'s komponent <u>langs</u> forbindelseslinjen mellom flaggermus og insekt. Nemlig: $\Delta f > 0 \Leftrightarrow$ "Jeg nærmer meg"; $\Delta f < 0 \Leftrightarrow$ "Det fjerner seg". Frekvensendringen kan <u>ikke</u> si noe om $\vec{v}_M$'s komponenter på tvers av forbindelseslinjen.

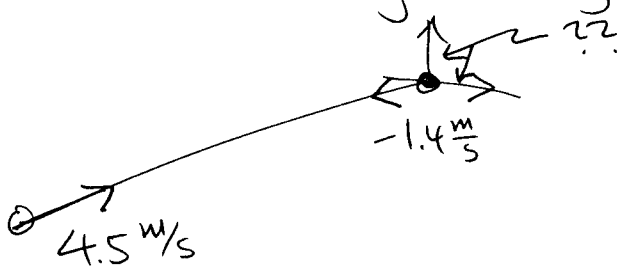
b (fortsatt): Med $\Delta t = 0.1\,s$: $\Delta x = \frac{340 \cdot 0.1}{2}\,m = 17\,m$

c $f_s = 80.7\,kHz$; $\Delta f_s = (83.5 - 80.7)\,kHz = 2.8\,kHz$

$$\frac{v_s - v_M}{v} = \frac{\Delta f_s}{2 f_s} \Rightarrow v_M = v_s - v \cdot \frac{\Delta f_s}{2 f_s}$$

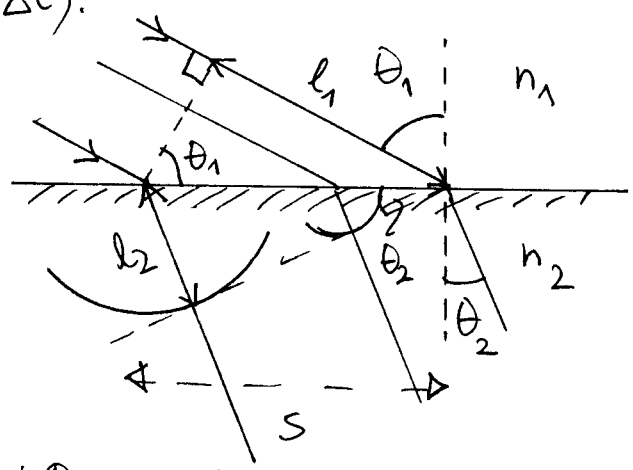
$$v_M = \left(4.5 - 340 \cdot \frac{2.8}{2 \cdot 80.7}\right)\frac{m}{s} = -1.4\,\frac{m}{s}$$

Insektets hastighetskomponent langs forbindelseslinjen flaggermus - insekt er $-1.4\,\frac{m}{s}$ (det flyr flaggermusen i møte). Men hastighetskomponentene normalt på forbindelseslinjen sier frekvensendringen ingenting om



Oppgave 3

a Huygens prinsipp: Alle punkter i bølgefronten kan oppfattes som kilder til kulebølger. Disse kulebølgenes sum gir ny bølgefront (etter Δt):



$$\frac{l_1}{\Delta t} = \frac{c}{n_1} \; ; \; \frac{l_2}{\Delta t} = \frac{c}{n_2}$$

Trigonometri gir

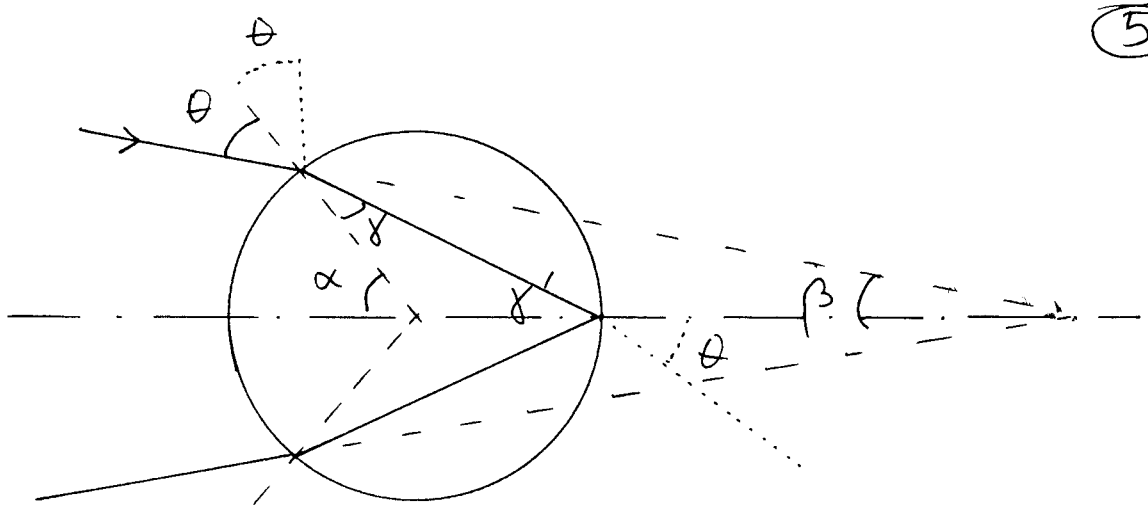
$s \sin\theta_1 = l_1$

$s \sin\theta_2 = l_2$

$$\frac{1}{s} = \frac{\sin\theta_1}{l_1} = \frac{\sin\theta_2}{l_2} = \frac{n_1 \sin\theta_1}{c\Delta t} = \frac{n_2 \sin\theta_2}{c\Delta t} \Rightarrow \boxed{n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2}$$

qed

b



Her er åpenbart (trigonometri og trekanter innskrevet i sirkel): $\gamma' = \gamma$ og $\pi - 2\gamma = \pi - \alpha$, altså

$$\alpha = 2\gamma$$

Dessuten: $\alpha = \theta + \beta$, slik at

$$2\beta = 2\alpha - 2\theta = 4\gamma - 2\theta \quad \text{(q.e.d.)}$$

Snells lov gir $\sin\theta = n \sin\gamma$ (når $n_{luft} = 1$) slik at

$$\gamma = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 45^\circ}{1.33}\right) = 32.1^\circ$$

To alternativer til den heltrukne lysstråen i figuren er de to prikkete: (i) Lyset reflekteres fra kula når det treffer første gang. (ii) Lyset brytes <u>ut</u> av kula når det treffer den indre overflaten første gang. (Dessuten kan det reflekteres på indre overflate 2, 3, ... ganger). Hovedpoenget er at hver gang en lysstråle treffer en grenseflate blir en del av lyset reflektert og resten blir brutt (unntak: totalrefleksjon).

$$2\beta = 4 \cdot 32.1^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 38.4^\circ$$

c Vi har

$$2\beta(\gamma) = 4\gamma - 2\theta = 4\gamma - 2\sin^{-1}(n\sin\gamma)$$

og $2\beta_{max}$ inntrer når $\sin\gamma = \sqrt{\frac{4-n^2}{3n^2}}$

Rødt lys: $n = 1.330 \Rightarrow \sin\gamma = 0.648$

$$2\beta_{max} = 42.5^\circ$$

Fiolett lys: $n = 1.342 \Rightarrow \sin\gamma = 0.638$

$$2\beta_{max} = 40.8^\circ$$

Dette forklarer kvantitativt den primære regnbuen: Rødt er konsentrert ytterst, ved sitt maksimum ved 42.5° (relativt siktelinjen fra sola gjennom observatøren). Fiolett har sitt maksimum innenfor, ved 40.8°. De øvrige fargene ligger mellom.

Men adskillig lys har lysganger gjennom dråpene med <u>mindre</u> 2β enn $2\beta_{max}$. Regneeksemplet under pkt <u>b</u> illustrerer dette. Her blandes fargene sammen slik at det totale resultatet er mer (hvitt) lys på <u>innsiden</u> av regnbuen. <u>Ikke noe</u> lys med <u>en</u> indre refleksjon i vanndråpene har $2\beta > 2\beta_{max,rødt}$. Altså: Mørkere (lik) utenfor.

(For sekundær-buen er det <u>omvendt</u>. Der er rødt, etter to indre refleksjoner konsentrert om $2\beta_{\underline{min}}$, med øvrig spredt lys <u>utenfor</u>!)