Løsningsforslag, Eksamen TFY4115, H2005

Oppgave 1 ①

$$\vec{L} = M\ \vec{R} \times \vec{V}_{CM} + I\vec{\omega}$$

a) $L_0 = I\omega_0 = \underline{\underline{\alpha M R^2 \omega_0}}$

b) $L_1 = MR\underbrace{R\omega_1}\ + I\omega_1$

Betingelse for ren rulling!

$$= MR^2\omega_1 + \alpha MR^2\omega_1$$

$$= MR^2(1+\alpha)\omega_1$$

Bevarelse av spinn:

$$L_0 = L_1$$

$$\alpha MR^2\omega_0 = MR^2(1+\alpha)\omega_1$$

$$\underline{\underline{\omega_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha}\omega_0}}$$

c) $s = \frac{1}{2}at^2$ $\qquad V = at$

$$= \omega_1 R$$

$$F_f = \mu g M = Ma$$

$$\underline{a = \mu g}$$

$$t = \frac{V}{a} \Rightarrow S = \frac{V^2}{2a}$$

$$= \frac{(\omega_1 R)^2}{2\mu g}$$

$$\underline{\underline{S = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}\frac{(\omega_0 R)^2}{2\mu g}}}$$

(2)

$$s = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2 B \; ; \quad B = \frac{(\omega_0 R_0)^2}{2\mu g}$$

Massiv kule: $\alpha = \frac{2}{5}$

Massiv ~~Hul~~ sylinder: $\alpha = \frac{1}{2}$

Hul sylinder: $\alpha = 1$

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = \left[\frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} - \frac{2\alpha^2}{(1+\alpha)^3}\right] B$$

$$= \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} B \left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$$

$$= \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^3} B > 0$$

Dette betyr at distansen legemet må bevege seg før bevegelsen går over til ren rulling, øker når α øker. Det betyr igjen at det legemet med minst α må bevege seg kortest distanse, mens det med størst α må bevege seg lengst lengde.

Massiv kule tilbakelegger kortest distanse før bevegelsen går over til ren rulling, mens hul sylinder må bevege seg lengst

d) Kinetisk energi

$$E_k = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Rett før legemet beveger undulaget

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \alpha M R^2 \omega_0^2$$

I det øyeblikket bevegelsen er gått til en rullende bevegelse:

$$E_k = \frac{1}{2} M R^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} \alpha M R^2 \omega_1^2$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 (1+\alpha) \omega_1^2$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 (1+\alpha) \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} \omega_0^2$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} M R^2 \omega_0^2 \left(\alpha - \frac{\alpha^2}{1+\alpha} \right)$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 \omega_0^2 \left(\frac{\alpha + \alpha^2 - \alpha^2}{1+\alpha} \right)$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} M R^2 \omega_0^2 \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$W = \text{Friksjonskraft} \cdot s$$

$$= \mu g M \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2} \frac{\omega_0^2 R^2}{2 \mu g}$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 \omega_0^2 \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^2$$

$$\Delta E_k - W = \frac{1}{2} M R^2 \omega_0^2 \left[\frac{\alpha}{1+\alpha} - \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2 \right]$$ 4

$$= \frac{1}{2} M R^2 \omega_0^2 \frac{\alpha}{1+\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 \omega_0^2 \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} > 0$$

Massiv kule $\alpha = \frac{2}{5}$: $\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{\frac{2}{5}}{\left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{10}{49} = 0.2041$

Massiv sylinder $\alpha = \frac{1}{2}$: $\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{2}{9} = 0.2222$

Hul sylinder $\alpha = 1$: $\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{1}{4} = 0.25$

$\Delta E_k - W$ er minst for massiv kule

$\Delta E_k - W > 0$ fordi tapet i kinetisk energi skyldes friksjonsarbeidet utført av et spinnende legeme, som beveger seg en distanse s. Fordi legemet spinner over en lengde s, blir den effektive lengden i friksjonsarbeidet som gir ΔE_k større enn $s \Rightarrow \Delta E_k > W$

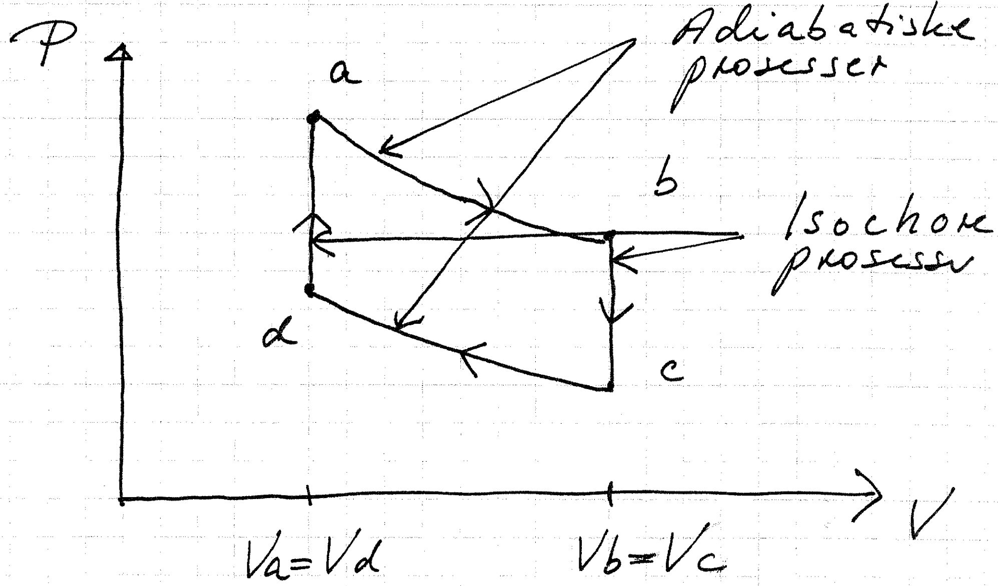
Oppgave 2

a) Isoterm prosess: Prosess med konstant temperatur.

Isochor prosess: Prosess med konstant volum

Isobar prosess: Prosess med konstant trykk

Adiabatisk prosess: Prosess der det ikke avgis eller opptas varme.



$V_b = V_c$

$\underline{\underline{V_a = V_d}}$

b) $$dQ = dU + PdV$$

$$\left.\begin{array}{l} a \to b: \\ c \to d: \end{array}\right\} \quad dQ = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} b \to c \\ d \to a \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} PdV = 0 \\ dQ = dU \end{array}$$

Dermed får vi, langs isochorene:

$$dU = C_V \, dT$$

Avgitt varme: $b \to c$: $\underline{\underline{Q_c = C_V (T_c - T_b)}}$

Opptatt varme: $d \to a$: $\underline{\underline{Q_h = C_V (T_a - T_d)}}$

c) Ideell gass: $PV = N k_B T$

Langs en adiabat: $dQ = 0$

$$0 = C_V \, dT + P \, dV$$

$$= C_V \, dT + N k_B T \frac{dV}{V}$$

$$0 = C_V \frac{dT}{T} + N k_B \frac{dV}{V}$$

$$C_p = C_V + N k_B$$

$$\frac{C_p - C_V}{C_V} = \frac{N k_B}{C_V} = \gamma - 1$$

$$0 = \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V}$$

$$C_1 = \ln T + (\gamma - 1) \ln V$$

der C_1 er en integrasjonskonstant.

$$C_1 = \ln \left(T V^{\gamma - 1} \right)$$

$$T V^{\gamma - 1} = e^{C_1} = \text{konstant}$$

langs en adiabat.

Dermed får vi, langs adiabaten $a \to b$:

$$\underline{\underline{T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1}}}$$

Tilsvarende, langs adiabaten $c \to d$:

$$\underline{\underline{T_c V_c^{\gamma-1} = T_d V_d^{\gamma-1}}}$$

$\underline{\underline{d)}}$ Virkningsgraden:

$$\varepsilon = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h}$$

$$= 1 - \frac{C_V (T_b - T_c)}{C_V \, T_a - T_d}$$

$$= 1 - \frac{T_b - T_c}{T_a - T_d}$$

I prosessen over er det volumet, og ikke temperaturen, som er eksternt kontrollert. Derfor ønsker vi å eliminere T til fordel for V. Til dette bruker vi adiabatligningen.

$$T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1}$$

$$T_d V_a^{\gamma-1} = T_c V_b^{\gamma-1}$$

$$(T_a - T_d) V_a^{\gamma-1} = (T_b - T_c) V_b^{\gamma-1}$$

$$\left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_b - T_c}{T_a - T_d}$$

Vi innfører nå

$$r = \frac{V_c}{V_a} = \frac{V_b}{V_a}$$

$$\left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\gamma-1} = \frac{1}{r^{\gamma-1}} = \underline{r^{1-\gamma}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1}}}$$

$\underline{\underline{r > 1}}$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \underline{\underline{1 + \frac{Nk_B}{C_V}}}$$

Spørsmålet er hvordan ε endres når vi endrer arbeidssubstansen fra 2-atomig til ~~en~~ 1-atomig gass. Da endrer vi γ.

2-atomig: $C_V = \frac{5}{2} Nk_B \Rightarrow \gamma = \frac{7}{5}$

1-atomig: $C_V = \frac{3}{2} Nk_B \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$

Vi øker γ når vi går fra 2-atomig til 1-atomig

$r > 1 \Rightarrow \frac{1}{r} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma-1}$ blir

mindre når γ øker. Dermed <u>øker</u> ε når vi går fra 2-atomig <u>til 1-atomig gass.</u>

Oppgave 3

a) $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \theta)$

$t = 0$: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} = V_0 \end{array}\right\}$ Oppgitte initial-betingelser.

$x(0) = 0 = A \cos\theta$

For å ha noen svingning i det hele tatt, må $A \neq 0$. Altså må $\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \quad \theta = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Velg $n =$ like $= 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$

(Valg av n odde betyr at A skifter fortegn).

Dermed: $\underline{x(t) = -A e^{-\gamma t} \sin(\omega t)}$

$$\frac{dx}{dt} = -\left[-\gamma A e^{-\gamma t} \sin(\omega t) + \omega A e^{-\gamma t} \cos(\omega t)\right]$$

$t = 0$: $\dfrac{dx}{dt} = V_0 = -\omega A$

$$\underline{\underline{A = -\frac{V_0}{\omega}}}$$

b) Sett $x(t) = \mathrm{Im}\left(A e^{-\gamma t + i\omega t}\right)$; $\underline{i = \sqrt{-1}}$

Innsatt i bevegelsesligning:

$$\underline{m(\gamma - i\omega)^2 - b(\gamma - i\omega) + k = 0}$$

Utmultiplisert, får vi: (10)

$k + m(\gamma^2 - \omega^2) - b\gamma + i(b\omega - 2\omega\gamma m) = 0$

Nå må realdel og imaginærdel hver for seg være null:

$$b\omega - 2\omega\gamma m = 0$$

$$\underline{\underline{\gamma = \frac{b}{2m}}}$$

$$\frac{k}{m} + \gamma^2 - \omega^2 - \frac{b\gamma}{m} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} + \gamma^2 - 2\gamma^2 = \frac{k}{m} - \gamma^2$$

$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}}}$$

$\underline{\underline{c)}}$

$$x(t) = -\frac{V_0}{\omega}\sin(\omega t)\,e^{-\gamma t}$$

Hadde vi istedet valgt n <u>odde</u> i pkt. a), ville vi fått:

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega}\sin(\omega t)\,e^{-\gamma t}$$

Maximalt utslag får vi når faktoren $\sin(\omega t)$ <u>når maximum</u> <u>første gang</u>: $\sin(\omega T_1) = 1 \Rightarrow \omega T_1 = \frac{\pi}{2}$

$$T_1 = \frac{\pi}{2\omega}$$

Ved tiden T_1 er $x(t)$:

$$x(T_1) = \pm \frac{V_0}{\omega} e^{-\gamma T_1} \cdot 1$$

$$= \pm \frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{\gamma \pi}{2\omega}}$$

$$= \pm \frac{V_0}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}} e^{-\frac{\pi \gamma}{2\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}}$$

La m øke med fiksert V_0.

b inngår som en friksjonskoeffisient

$$F_f = \mu m a$$

$b \sim m$ $\quad \gamma = \frac{b}{2m} \sim$ uavh. av $\underline{m}$

Når m øker, reduseres $\underline{\omega}$

$$|x(T_1)| = \frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{\pi \gamma}{\omega}}$$

ω reduseres $\Rightarrow$ $|x(T_1)|$ reduseres når

$$\gamma^2 < \frac{k}{m} < 2\gamma^2$$

$|x(T_1)|$ øker når

$$\frac{k}{m} > 2\gamma^2$$

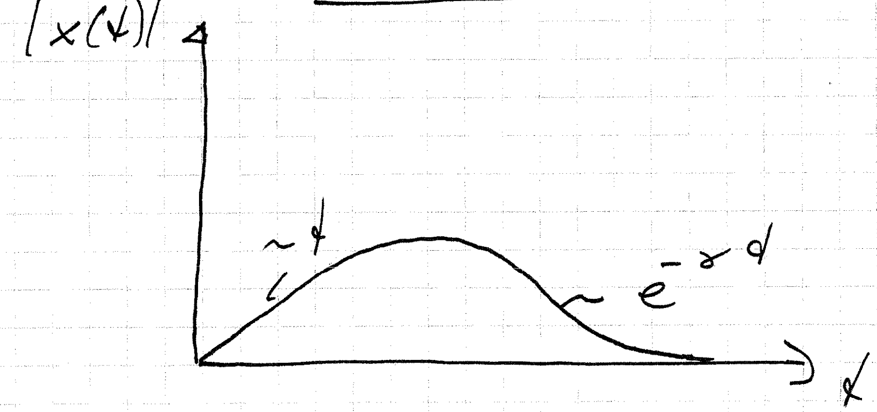
d) Det som gjør at $x(t)$ utfører en svingebevegelse, er faktoren $\sin(\omega t)$.

$$x(t) = \pm \frac{V_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$

For å hindre svingning, må vi ha: $\underline{\omega = 0}$. Da blir

$$x(t) = \pm \lim_{\omega \to 0} \frac{V_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$

$$= \underline{\underline{\pm V_0 t e^{-\gamma t}}}$$



$$\omega = 0 \iff \frac{b}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Minste verdi av b som gir et slikt forløp: $\underline{\underline{b = \sqrt{2km}}}$