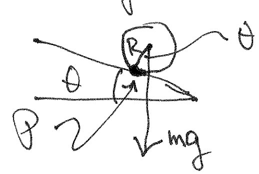
Løsningsforslag, Eksamen TFY 4115, H06

6 korte spørsmål

Se merknad på side 10 !

1. Når to "sluknete" satellitter kolliderer
   - er det ingen grunn til å tro at kollisjonen er elastisk, kinetisk energi vil derved gå tapt ved at den omgjøres (delvis) til varme. Kinetisk energi er ikke konservert.
   - vil bevegelsesmengden i selve kollisjonsprosessen være konservert. Riktignok vil begge satellittene hele tiden påvirkes av tiltrekningskraften fra jorda, som yter den nødvendige sentripetalkraft. Svaret: "Bevegelsesmengden er bevart" er OK siden det antas å referere til selve kollisjonsprosessen. Nyansering av svaret pga jordas tiltrekning er selvsagt utmerket!
   - Satellittens totale spinn må være konservert når referansepunktet er jordas sentrum. Da vil kraften × arm = dreiemoment være null.

2. Kassen beveger seg ikke, altså må netto kraft på kassen være null. Friksjonskraften er derfor 500 N og rettet mot dyttekraften (som forutsettes å være parallell med underlaget). Den maksimale friksjonskraft er
$$\mu_s mg = 0.6\cdot 100\cdot 9.8\ \text{N} = 588\ \text{N} > 500\ \text{N}\quad \text{ok!}$$

3. 

Dreiemoment relativt punktet P:
$$\tau = \text{kraft}\times\text{arm} = mg\times R\sin\theta = mgR\sin\theta$$

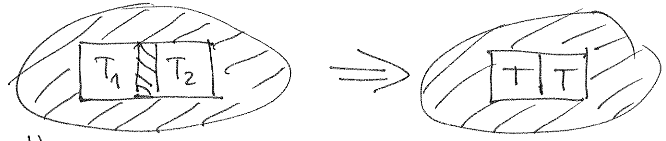
4. Termodynamikkens første lov (energibevarelse) kan skrives

$$\underbrace{\Delta Q}_{\text{tilført varme}} = \overbrace{\Delta U}^{\text{endring i indre energi}} + \underbrace{\Delta W}_{\text{arbeid utført på omgivelsene}} \qquad (\text{eller } Q = \Delta U + W)$$

Varmekapasiteter er definert som:
$$C_V = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_V ;\quad C_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_p \qquad (\text{strengt tatt: } \lim_{\Delta T\to 0})$$
V+ΔV

Siden $\Delta W = \int p\,dV$, er $\Delta W = 0$ når $\Delta V = 0$, ved konstant volum utfører systemet intet arbeid på omgivelsene, all tilført varme blir brukt til å heve indre energi. Når derimot $p =$ konst., er $\Delta W = p\Delta V$, systemet utfører arbeid på omgivelsene, i tillegg til at indre energi øker (når varme tilføres). Altså*: $C_p > C_V$

Siden kompressibiliteten til gasser er betydelig, er $C_p - C_V$ betydelig for gasser (Eks: Ett mol ideell gass $C_p - C_V = R$, mens $C_V = \frac{5}{2}R$ toat.)
Kompressibiliteten til væsker, og i enda høyere grad faste stoff, er så liten at forskjellen $C_p - C_V$ i de aller fleste tilfelle kan neglisjeres relativt (f.eks.) C_p.

5. 

Her er $Q = 0$, siden klossene er varmeisolert fra omgivelsene. Dessuten er $W = 0$. Derved

* Ett veldig spesielt unntak: Vann mellom 0°C og 4°C. Da er [illegible]

gir 1. hovedsetning at ΔU, dvs den totale indre energi er bevart i temperaturutjevnings-prosessen. Siden prosessen åpenbart er irreversibel (den går ikke spontant motsatt vei!), er $\Delta S > 0$. Entropien øker, den er ikke bevart. Produktet $T_1 T_2$ er det heller ikke, $T = \frac{1}{2}(T_1+T_2)$ siden $C_1 = C_2 = C$. (Dersom utjevningsprosessen hadde vært kjørt reversibelt, med uttak av arbeid i en Carnot-type prosess, ville derimot $\Delta S = 0$ og $T_1 T_2 = \text{konst}$.)

6. For en elektrisk svingekrets med L, C og R koplet i serie, gir Kirchhoff: $-Q/C + RI + L\dot{I} = 0$, eller $L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = 0$. Dette gir analogiene: $L \Leftrightarrow m$; $R \Leftrightarrow b$; $1/C \Leftrightarrow k$.

Oppgave A

7. Varmeledningsligningen (med Fouriers lov $\vec{j} = -\kappa \nabla T$) gir $j = -\kappa \frac{T_1 - T_2}{b}$ (med passende fortegnsvalg)
Ohms lov $I = U/R$ gir derfor analogiene
$T_1 - T_2 \Leftrightarrow$ potensialforskjell = spenning; $j \Leftrightarrow$ strøm
$b/\kappa \Leftrightarrow$ motstand. En lagdelt vegg blir da analog med en seriekopling av motstander, slik at varmeledningsstrømmen (rettet innenfra og ut) blir

$$j_\ell = \frac{T_i - T_y}{\frac{b_i}{\kappa_t} + \frac{b_\ell}{\kappa_\ell} + \frac{b_y}{\kappa_t}}$$

Dimensjoner: $[j_\ell] = \frac{W}{m^2}$; $[T] = K$; $[b] = m$; $[\kappa] = \frac{W}{m \cdot K}$

Dimensjonen til κ kan, slik den er notert i oppgaven $W/(mK)$ misforstås som milliKelvin i stedet for meter·Kelvin. Men at dette er en misforståelse, må være åpenbart siden den gir $[j_\ell] = K \cdot \frac{W}{K} / m = W/m$, som ikke er en energistrøm pr. flateenhet.
Innsetting av tall (med $cm = 10^{-2} m$) gir: $j_\ell = 3.76 \frac{W}{m^2}$

8. I analogi med Ohms lov ($U = RI$) er

$$T_i - T_{io} = j_\ell \frac{b_i}{\kappa_t} \quad \text{og} \quad T_{yo} - T_y = j_\ell \frac{b_y}{\kappa_t}$$

Innsetting av tall (inkludert $j_\ell = 3.76\, W/m^2$) gir

$$T_{io} = \left(293 - 3.76 \frac{0.02}{0.14}\right) K = 292.46\, K$$

$$T_{yo} = \left(273 + 3.76 \frac{0.025}{0.14}\right) K = 273.67\, K$$

9. Når vi tilnærmer* $T_{io}^4 - T_{yo}^4 \approx 4T^3 (T_{io} - T_{yo})$ får vi

$$\frac{j_s}{j_\ell} = \frac{\frac{e}{2-e} \sigma \cdot 4T^3}{\frac{\kappa_\ell}{b_\ell}} = b_\ell \cdot \frac{e}{2-e} \frac{\sigma}{\kappa_\ell} 4T^3 \sim b_\ell$$

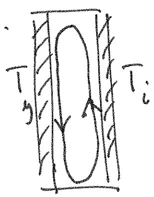
Forholdet er proporsjonalt med b_ℓ!
Og med innsatte tall blir dette

$$\frac{j_s}{j_\ell} = 17.1 \quad (\text{når } b_\ell = 12\, cm)$$

Stråling dominerer meget sterkt** over varmeledning ved en så stor spaltebredde. (I et dobbeltvindu med $b_\ell = 1.2\, cm$ ville $j_s/j_\ell = 1.71$.)

** Selv om den er usynlig (langt ute i det infrarøde).

* Sjekk: $T_{io}^4 - T_{yo}^4 = 17.066 \cdot 10^8 K^4$; $4\left(\frac{T_y + T_i}{2}\right)^3 (T_{io} - T_{iy}) = 17.035 \cdot 10^8 K^4$

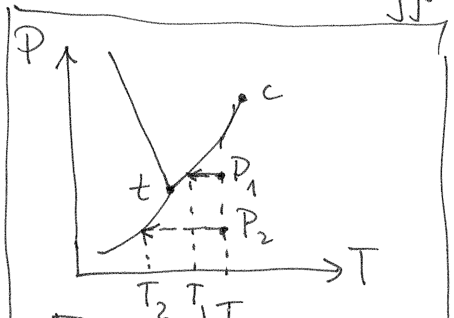
10. 

Ved tilstrekkelig stor b_ℓ vil et luftstrømningsmønster som skissert settes opp av temperaturforskjellene. Lufta nær innerveggen varmes opp, stiger derfor opp siden den blir lettere, og avgir varme til den kalde ytterveggen på vei ned igjen. Et slikt strømningsmønster etableres allerede ved $b_\ell \sim 2$cm og ved $b_\ell = 12$cm, som her, vil det gi et betydelig bidrag til varmetransporten fra innervegg til yttervegg. Bidraget vil dominere over varmeledning, og kan bli av tilsvarende størrelsesorden som strålingsbidraget.

11. Mineralull er, grovt sett, en dobbelt så effektiv varmeleder som luft. Likevel vil mineralull i luftgapet på 12cm redusere varmestrømmen betydelig. Konveksjon blir umuliggjort og strålingsbidraget, som uten mineralull var 17 ganger så stort som bidraget fra varmeledning, blir minimalt. Grunnen er at strålingen nå vil skje mellom nabo-"flater" i mineralullen med ubetydelig spaltebredde. Og siden forholdet $j_s/j_e \sim b_e$ blir strålingsbidraget neglisjerbart. Altså: Mineralullen fjerner effektivt konveksjon & stråling.

Diffusjonstett papp plasseres på innsiden av mineralullen for å hindre at H_2O-komponenten i fuktig inneluft diffunderer ut gjennom

mineralullen i veggen og (dersom temperaturfallet er stort nok) kondenserer til vann eller is.



Fasediagram for H_2O

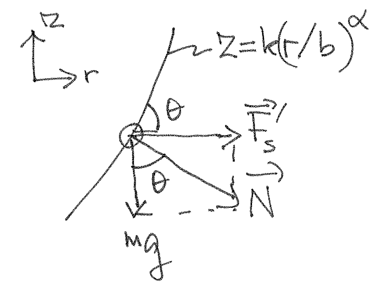
Ved $P_{H_2O} = P_1$, vil vann kondenseres ut ved avkjøling til T_1. Ved $P_{H_2O} = P_2$, vil is kondenseres ut ved avkjøling til T_2. Kondensert H_2O i veggen vil gi råte-problemer. Derfor diffusjonstett papp på innsiden av mineralullen.

Oppgave B

12. Sentripetalkraften $\vec{F}_s$ er den kraften som skal til for å holde massen m i en sirkelbane med radius r og fart v, eller vinkelhastighet $\omega = v/r$.

$$F_s = |\vec{F}_s| = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r \quad ; \quad \vec{F}_s \text{ rettet inn mot}$$

sirkelbanens sentrum

13. 

Sett fra kulas koordinatsystem, som roterer i horisontalplanet, må nettokraften $\vec{N}$ være vinkelrett på bøylen i dynamisk likevekt.

Dersom nettokraften hadde en komponent langs bøylen, ville kula gli opp/ned (alt ettersom). Kraften $\vec{N}$, som er summen av sentrifugalkraften $\vec{F}_s' = -\vec{F}_s$ (sentripetalkraften) og vekten, $-mg\hat{z}$, utbalanseres av en like stor normalkraft fra bøylen på kula, $-\vec{N}$. Av figuren ser vi at

$$\frac{|F_s'|}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g} = \tan\theta = \frac{dz}{dr} = \frac{\alpha k}{b^\alpha} r^{\alpha-1}$$

Altså

$$\omega^2 = \frac{\alpha k g}{b^\alpha} r^{\alpha-2} \Rightarrow \underline{\omega^2 = C r^{\alpha-2}} \qquad \text{q.e.d.}$$

$$\boxed{C = \frac{gk\alpha}{b^\alpha}} \qquad \boxed{\omega_m = \frac{gk\alpha}{b^2}}$$

14. Newtons andre lov for rotasjon lyder

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega)$$

Her er treghetsmomentet $I = 2\cdot mr^2$, og siden både r & ω kan avhenge av tiden har vi

$$\frac{d}{dt}(2mr^2\omega) = 2mr^2\frac{d\omega}{dt} + 2m\omega\frac{dr^2}{dt} = \tau = -\eta\omega \qquad \text{q.e.d.}$$

(for $r_0 < r(t) < r_m$)

15. Når friksjonen gir et dreiemoment $\tau = -\eta\omega$ på bøylen, vil energien avta og til slutt vil $r = r_0$ og $\omega = 0$. Det er svært vanskelig å

forestille seg annet enn at $r(t)$ vil avta jevnt og trutt fra r_m til r_0. Men hva med $\omega(t)$? Når r avtar, vil I avta og dermed er det faktisk tenkelig at $\omega(t)$ øker! Vi får se.

Først bestemmes $r(t)$, eller $r^2(t)$. Her er det lett å regne seg bort, og regningen kan gjennomføres på mange ekvivalente måter. F.eks: Divider den dynamiske ligningen med ω:

$$2mr^2\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt} + 2m\frac{dr^2}{dt} = -\eta$$

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\ln\omega = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\ln C + \ln r^{\alpha-2}\right) = \frac{\alpha-2}{4}\frac{d}{dt}\ln r^2$$

$$= \frac{\alpha-2}{4}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{dt}$$

Altså

$$2m\left[\frac{\alpha-2}{4} + 1\right]\frac{dr^2}{dt} = m\frac{\alpha+2}{2}\frac{dr^2}{dt} = -\eta$$

eller

$$\frac{dr^2}{dt} = -\frac{2\eta}{(\alpha+2)m} \Rightarrow r^2(t) = -Kt + \text{konst.}$$

$$r^2(0) = r_m^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{r^2(t) = r_m^2 - Kt \;;\; K = \frac{2\eta}{(\alpha+2)m}}$$

Men r^2 kan ikke bli mindre enn r_0^2. Det skjer ved $t=t_0$:

$$r_0^2 = r_m^2 - Kt_0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{r_m^2 - r_0^2}{K} = \frac{(\alpha+2)m}{2\eta}\left(r_m^2 - r_0^2\right)$$

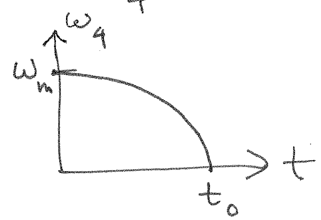
(dette er det ikke spurt om i oppgaven, men er en liten regning som klargjør hva som skjer)

16. Dette punktet kan løses uten at konstantene C og K er kjent som funksjoner av systemets parametre, dvs. uten å ha løst pkt 13 og 15:

$$\omega^2(t) = C\, r^{\alpha-2} = C\left(r^2\right)^{\frac{\alpha-2}{2}} = C\left(r_m^2 - Kt\right)^{\frac{\alpha-2}{2}}$$

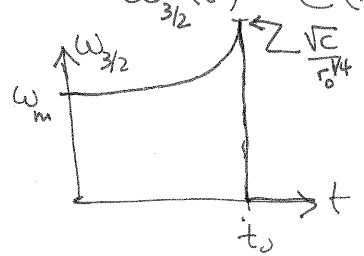
La først $\alpha = 4$:

$$\omega_4^2(t) = C\left(r_m^2 - Kt\right)^1 \quad \Rightarrow \quad \omega_4(t) = \sqrt{C}\sqrt{r_m^2 - Kt}$$



Dernest: $\alpha = \frac{3}{2}$

$$\omega_{3/2}^2(t) = C\left(r_m^2 - Kt\right)^{-\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{3/2}(t) = \frac{\sqrt{C}}{\left(r_m^2 - Kt\right)^{1/8}}$$



Her øker ω som funksjon av t inntil $\omega_{3/2}(t_0) = \frac{\sqrt{C}}{r_0^{1/4}}$ som er maksimalverdien, før $\omega_{3/2} = 0$, for $t > t_0$.

Skal den dynamiske likevekten i omdreiningsaksen uten friksjon eller med (liten!) friksjon være stabil, må $\alpha > 1$. Av regningene ser vi at $\omega(t)$ vil øke når $0 < t < t_0$ (med litt friksjon) dersom $1 < \alpha < 2$.*

På den annen side, dersom $\alpha > 2$ vil $\omega(t)$ avta med t når $0 < t < t_0$.

Dersom $\alpha = 2$, vil $\omega(t) = \omega_m$ i hele tidsintervallet $0 < t < t_0$.

For $t > t_0$ vil kulene ligge i ro ved r_0, og vinkelfrekvensen vil være $\omega = 0$, for hvilken som helst verdi av α!

Merk: Dette løsningsforslaget går mye mer detaljert til verks enn det er forventet av en eksamensbesvarelse!

(Forhåpentligvis til glede for senere studentkull som arbeider med gamle eksamensoppgaver!)

* ω øker her, men $v = \omega r = \sqrt{C}\, r^{\frac{\alpha-2}{2}+1} = \sqrt{C}\, r^{\frac{\alpha}{2}}$ vil avta (sammen med $r^{\alpha/2}$), uansett verdi på α.