TFY4115 Eksamen H09, løsningsforslag

Spørsmålene i oppgavene er gjengitt i kursiv for hvert punkt nedenfor. I løsningsforslaget som følger, er det tatt med detaljer og kommentarer som ikke forventes i eksamensbesvarelsene. Når det for eksempel i oppgaveteksten bes om et *kort* svar, er det derfor en kort, stikkordmessig besvarelse som forventes. Dette løsningsforslaget blir antakelig brukt av studenter som forbereder seg til senere eksamener. Derfor har jeg valgt å skrive en mer omfattende tekst.

Oppgave 1. Fire spørsmål

1a. *En huseier lenser det skrå taket for snø, mister fotfeste og holder på å skli utfor. Han redder seg ved å kyle snøskuffen av all kraft i bevegelsesretningen utfor taket, og derved får han klort seg fast. Forklar kort fysikken han snarrådig har gjort bruk av.*

Når huseieren kyler (dvs. kaster med full kraft) snøskuffen i bevegelsesretningen, gjør han bruk av at i løpet av den korte tiden kastprosessen varer, kan vi regne impulsen (bevegelsesmengden) som bevart. Den ekstra impulsen som tilføres snøskuffen, må da gå på bekostning av mannens bevegelsesmengde, han bremses opp (forhåpentlig tilstrekkelig til at han kan klore seg fast). Alternativt kan en henvise til Newtons tredje lov: Kraft er lik motkraft. Kraften mannen kaster skuffen med, genererer en motkraft fra skuffe til mann, like stor og med motsatt fortegn.

Dette er ikke to uavhengige forklaringer, men to måter å uttrykke ett og det samme på. Kreftene mellom mann og snøskuffe er "indre krefter" i mann-skuffe systemet, og påvirker ikke totalsystemet impuls, som derved er bevart (når vi ser bort fra innvirkningen fra tyngden, friksjonen etc. i det korte øyeblikket mannens kraftanstrengelse varer). Prinsippet er det samme som forklarer raketters virkemåte.

1b. *Det er senhøstes, og en kald og klar morgen skal sivilingeniøren på jobb. Bilen (hun er nødt til å bruke bil, dessverre), er parkert utendørs. Hun konstaterer at biltaket (bl.a.) er dekket med et tynt islag, men at asfalten er helt bar. Velutdannet som hun er, har hun ingen problemer med å forklare fysikken bak denne forskjellen. Hva er forklaringen?*

Strålingsutvekslingen mellom (objekter på) bakken og en klar nattehimmel gir avkjøling, siden tommelfingerregelen er at en klar himmel stråler omtrent som et svart legeme med temperatur 20 grader under lufttemperaturen ved bakken. Varmeledningsligningen (formelarket) viser at nedkjøling av et legeme går raskere dersom varmeledningevnen er stor og dersom varmekapasiteten er liten. Biltaket har stor varmeledningsevne og liten effektiv varmekapasitet (taket har meget liten varmekontakt med resten av bilen). Asfalten har derimot liten varmeledningsevne og, først og fremst, mye større effektiv varmekapasitet. Derved kjøles biltaket i løpet av natta ned til en atskillig lavere temperatur enn asfalten (og lufta!). Dersom luftas relative fuktighet er rimelig stor ved luftas egen temperatur (slik den ofte er senhøstes), vil den lufta som kjøles ned i kontakt med biltaket (med temperatur under frysepunktet) kunne få relativ fuktighet 100% og derved kondenseres fuktigheten ut som vann som fryser. Asfalten er i vårt (sivilingeniørens) tilfelle åpenbart ikke blitt tilstrekkelig kald til at dette skjer.

Her er det i og for seg mye som kunne gis utfyllende kommentarer.

- Både innstrålingen fra den kalde himmelen og utstrålingen fra den ikke fullt så kalde bakken har sitt tyngdepunkt i (forskjellige deler av) det infrarøde området. Siden den totale strålingstettheten er proporsjonal med T^4, vil en temperaturforskjell på rundt 20 grader gi et betydelig innstrålingsunderskudd. Men hvordan er det med $a = e$ (absorbsjons- = emisjonsevnen) i dette bølgelengdeområdet for henholdsvis det metalliske biltaket og asfalten? Godt spørsmål som her ikke skal gis et utfyllende svar: Hovedpoenget er at forskjellene i absorbsjonsevne her er relativt små i forhold til den drivende "kraft" som temperaturforskjellen med himmelen gir.

- Men hvis sivilingeniøren skal så seint på jobb at sola har stått opp og begynt å bidra effektivt til innstrålingen? Ja, da endres forholdene dramatisk. En underforstått forutsetning i oppgaven (burde vært spesifisert i teksten) er at sola ikke har rukket å spille med.
- Og hva med direkte varmeovergang mellom lufta og objektene som avkjøles? Vel, den mekanismen vil bremse nedkjølingen, men den kan ikke forhindre den, netto strålingstap er altfor stort til det.
- Men har ikke romvinkelen som den kalde himmelen opptar, "sett" fra biltaket (eller fra asfalten) noe med saken å gjøre? Jo, definitivt! Hvis bilen står tett inntil en husvegg, en hekk eller lignende, vil nedkjølingen bli vesentlig mindre. For ikke å snakke om asfalten under selve bilen. Den utveksler ikke stråling med himmelen i det hele tatt, og mekanismen for avkjøling under den generelle lufttemperaturen er derved fraværende.
- Når det gjelder det tynne biltaket, er saken rimelig grei: Hele taket bidrar til varmekapasiteten (vi ser bort fra den innvendige polstringen). Men hvor stor del av asfaltlaget (etc.) bidrar? Vel, dette er en mer komplisert problemkrets. En enkel versjon av problemet er behandlet i læreboka, der forplanting av overflatens temperatursvingninger nedover i bakken er behandlet. Kvalitativt kan en si at noen cm tykkelse definitivt spiller med, og dette gir en betydelig varmekapasitet, mye større enn biltakets.
- Hva med varmestrømmen opp fra jordas indre? Bidraget derfra er i denne sammenheng at temperaturen et stykke ned i bakken er rimelig høy, og tilnærmet konstant. Slik sett bidrar den til å begrense hvor stor del av asfaltens tykkelse (og derved varmekapasitet) som spiller med i vår sammenheng.
- Hvordan vet vi at luftas relative fuktighet i utgangspunktet er mindre enn 100% ? Rett og slett fordi det er klarvær. Hadde lufta selv vært mettet, ville vanndråper kondenseres ut, vi ville hatt tåke.
- Den absolutte fuktigheten til lufta som, ved direkte kontakt, avkjøles av biltaket eller asfalten, er i god tilnærmelse den samme som i lufta generelt (luftas sammensetning endres ikke så lett!). Avhengig av den relative fuktighet i lufta generelt, vil en derfor få kondens både på biltak og asfalt, bare på biltaket, eller hverken på biltak eller asfalt. I en kuldeperiode midtvinters er luftfuktigheten blitt så lav at kondensproblemet på *utsiden* av bilen kan være helt fraværende, mens det oppstår kondens på *innsiden* på grunn av passasjerenes pust.
- Her kunne vi bare ha fortsatt å diskutere flere sider av problemkretsen, nesten hvor lenge det skulle være: Dette bare for å minne om at virkelighetens fysikkproblemer ofte er langt mer komplekse enn de mer eller mindre idealiserte problemene et grunnkurs i fysikk tar opp.

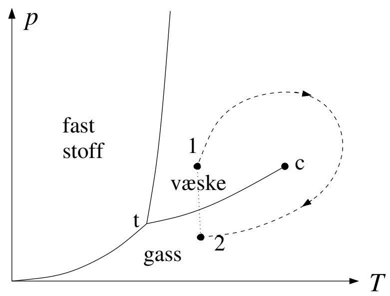
1c. *En slipestein med radius R og masse M dras i gang av en motor som leverer det konstante dreiemomentet τ (dimensjon Nm). Hvilken vinkelhastighet har slipesteinen kommet opp i etter én full omdreining?*

En slipestein er en sylinderformet stein som dreies om symmetriaksen, og brukes til å slipe skarpe redskaper (for den som ikke måtte vite det). Treghetsmomentet er derfor $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$. Den settes i gang av en motor som leverer et konstant dreiemoment τ. Etter én omdreining har motoren da levert arbeidet (formelarket) $W = \tau \cdot 2\pi$, og derved er slipesteinens kinetiske energi øket fra null til $E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}I_0\omega^2 = W = 2\pi\tau$, slik at

$$\omega = \sqrt{\frac{4\pi\tau}{I_0}} = \sqrt{\frac{8\pi\tau}{MR^2}} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{2\pi\tau}{M}}.$$

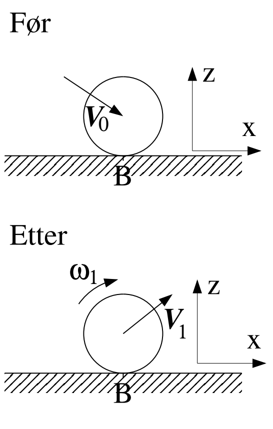
Alternativt kan oppgaven løses ved å skrive $\theta = 2\pi = \frac{1}{2}(\tau/I_0)t^2$, bruke dette til å bestemme t, og så regne ut $\omega = (\tau/I_0)t$. Svaret blir det samme.

1d. *Skisser et standard fasediagram i (p, T)-planet for fasene gass, væske og fast stoff. Hva karakteriserer henholdsvis trippelpunktet og det kritiske punkt?*



Fasediagrammet til venstre er typisk for de fleste stoff (når vi ser bort fra muligheten for flere faststoff-faser). Det består av tre koeksistenskurver der to faser er i likevekt med hverandre. De møtes i trippelpunktet, merket t, punktet der alle tre faser er i gjensidig likevekt. Det kritiske punktet, c, er punktet der koeksistenskurven mellom væske og gass slutter. Over kritisk temperatur har det ingen mening å skille mellom gass og væske, de er blitt *en* isotrop fase. Det innebærer at en kan gå fra væske- til gassfasen (eller omvendt) ved å velge en vei i faseplanet som går *utenom* det kritiske punktet, som vist i den stiplete linjen i figuren. Krysses en koeksistenskurve, svarer det til en (første ordens) faseovergang: Koking/kondensasjon, sublimering/kondensasjon, eller smelting/frysing.

Oppgave 2. Klassisk mekanikk



En kule med masse m og radius r faller skrått ned på et horisontalt bord. Kula støter mot bordet og spretter videre. Umiddelbart før støtet mot bordet har kula vinkelhastighet $\omega_0 = 0$ (kula roterer ikke) og tyngdepunktshastighet $\boldsymbol{V}_0 = V_{0x}\hat{\boldsymbol{x}} - |V_{0z}|\hat{\boldsymbol{z}}$. Vertikalkomponenten av støtet er fullstendig elastisk, men horisontalt er friksjonen mellom kule og bord tilstrekkelig til å bremse relativhastigheten mellom kuleoverflate og bord (i berøringspunktet, B) ned til null i løpet av (det meget kortvarige!) støtet. Kula kommer derfor ut av støtet i det som tilsvarer "rullemodus".

2a. *Hva er tyngdepunktets vertikalhastighet V_{1z} umiddelbart etter støtet?*

Med elastisk støt i z-retningen, er hastighetskomponenten umiddelbart etter støtet gitt som $V_{1z} = |V_{0z}| = -V_{0z}$. (Bordet, med "uendelig" masse, har absorbert impulsendringen.)

2b. *Forklar hvorfor kulas totale dreieimpuls relativt berøringspunktet B er bevart i støtet.*

Tyngdekraften tar tak i kulas tyngdepunkt og virker loddrett nedover. Derved peker denne vektoren rett på berøringspunktet B, og har ingen arm om dette punktet. Dessuten virker normalkraften og den horisontale friksjonskraften fra bordet *i* selve berøringspunktet, og har heller ingen arm relativt B. Siden alle krefter har null arm relativt B, blir dreiemomentet relativt dette punktet lik null, og med $\tau = \mathrm{d}L/\mathrm{d}t = 0$ er den totale dreieimpulsen (totalspinnet) til kula (relativt referansepunktet B!) bevart *i selve støtprosessen.*

2c. *Bruk dreieimpulsbevarelsen til å bestemme horisontalkomponenten V_{1x} og vinkelfrekvensen ω_1 til kula etter støtet.*

Dreieimpulsbevarelse gir (der L er vektoren $\boldsymbol{L}$'s y-komponent, komponenten vinkelrett på papirplanet),

$$L_{\text{før}} = mrV_{0x} = L_{\text{etter}} = mrV_{1x} + I_0\omega_1.$$

Før støtet har kula bare banedreieimpuls, mens den etter støtet både har banedreieimpuls og egenspinn. (Merk at det er I_0 som inngår i egenspinnet, ikke treghetsmomentet om B!) Banespinnet er på vektorform gitt som

$$\boldsymbol{L} = m[(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}_B) \times \boldsymbol{V}] = m(r\hat{\boldsymbol{z}} \times V_x\hat{\boldsymbol{x}}) = mrV_x\hat{\boldsymbol{y}},$$

når $(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}_B) \parallel \boldsymbol{V}_z (= V_z\hat{\boldsymbol{z}})$, slik situasjonen er i støtøyeblikket. Friksjonen mot bordet er antatt stor nok til å bremse kuleoverflaten som kommer i kontakt med bordet helt ned til null i løpet av støtet. Derved må sammenhengen mellom tyngdepunktets x-hastighet V_{1x} og kulas vinkelhastighet etter støtet ω_1 være $V_{1x} = r\omega_1$, helt analogt "standard" rullebetingelse, selv om kula slett ikke ruller, men spretter videre. Altså, med $I_0 = \frac{2}{5}mr^2$ (når vi antar at kula er massiv, antar vi kuleskall endres koeffisientene):

$$mrV_{0x} = mrV_{1x} + \tfrac{2}{5}mrV_{1x} \quad \Rightarrow \quad V_{1x} = \tfrac{5}{7}V_{0x} \quad ; \quad \omega_1 = V_{1x}/r.$$

Kommentar: Alternativt (OK, men ikke å anbefale) kunne vi oppfattet kulas bevegelse (bortsett fra bevegelsen i z-retningen) *på vei ut av støtet* som en ren rotasjon om berøringspunktet B. Da kommer Steiners sats inn, slik at

$$L_{\text{etter}} = I_B\omega_1 = (\tfrac{2}{5}mr^2 + mr^2) \cdot (V_{1x}/r) = \tfrac{7}{5}mrV_{1x},$$

i overensstemmelse med svaret funnet ovenfor.

2d. *Beregn det mekaniske energitapet ΔE i støtet.*

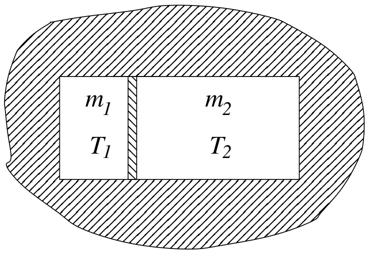
Siden vertikalkomponenten av støtet er elastisk, vil energitapet utelukkende være knyttet til x-komponenten. Derved er tapet gitt som

$$\begin{aligned} \Delta E &= \tfrac{1}{2}mV_{0x}^2 - (\tfrac{1}{2}mV_{1x}^2 + \tfrac{1}{2}I_0\omega_1^2) \\ &= \tfrac{1}{2}mV_{0x}^2[1 - (5/7)^2 - (2/5)(5/7)^2] = \tfrac{1}{2}mV_{0x}^2(49 - 25 - 10)/49 = \tfrac{1}{7}mV_{0x}^2. \end{aligned}$$

2e. *Vi ser (fortsatt) bort fra luftmotstanden. Etter første støt vil da kulas tyngdepunkt bevege seg i en parabelbane for så å støte mot bordet for annen gang. Hva er energitapet i dette støt nr. to?*

Mellom første og andre støt mot bordet er kulas horisontalhastighet V_{1x} og vinkelhastighet ω_1 konstante (siden vi ser bort fra luftmotstanden). Derved vil kuleoverflatas underside hele tida ha null *horisontal* hastighet (selv om tyngdepunktet beveger seg!), og det blir derfor *null* friksjonstap i støt nummer to.

Oppgave 3. Termisk fysikk



To kopperklosser, med masser m_1 og m_2, befinner seg på hver sin side av en flat skillevegg inne i en isoporkasse, se figuren. Skilleveggen har areal A og tykkelse b. Klossen til venstre har temperaturen T_1 og klossen til høyre T_2 ($T_2 > T_1$). Systemet som helhet er termisk fullstendig isolert, men de to klossene kan utveksle varme ved varmeledning gjennom skilleveggen. Temperaturforskjellen $\Delta T = T_2 - T_1$ vil derfor langsomt utjevnes. Utjevningsprosessen er tilstrekkelig langsom til at vi kan anta at klossene hver for seg er i intern termisk likevekt under prosessen. Skilleveggen er tynn nok til at vi kan neglisjere dens varmekapasitet.

3a. *Skriv ned et uttrykk for den totale varmestrømmen J fra høyre mot venstre side, når veggens varmeledningsevne er κ.*

Siden varmestrømtettheten er gitt som (formelarket) $\boldsymbol{j} = -\kappa \nabla T$, er total varmestrøm gjennom en plate med areal A og tykkelse b

$$J = A\kappa \Delta T/b = A\kappa(T_2 - T_1)/b.$$

(Her regnet positiv fra høyre mot venstre.)

3b. *Varmestrømmen fra høyre mot venstre side gir en entropistrøm ut av klossen på høyre side, $\mathrm{d}S_2/\mathrm{d}t$, og inn i klossen på venstre side, $\mathrm{d}S_1/\mathrm{d}t$. Uttrykk disse størrelsene ved J, T_2 og T_1.*

Total varmestrøm er $J = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, og, for reversible endringer, er entropidifferensialet gitt ved (formelarket) $\mathrm{d}S = \mathrm{d}Q/T$. Vi har antatt at temperaturutjevningsprosessen går langsomt, og siden kopper har god varmeledningsevne (mye bedre enn skilleveggen!), kan vi regne som om kopperklossene er i intern likevekt under temperaturutjevningen. Prosessen er derfor et eksempel på en "kvasistatisk" prosess. Kloss 1 mottar varme ved temperaturen T_1, kloss 2 avgir varme ved temperaturen T_2:

$$\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t} = \frac{J}{T_1} \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{J}{T_2}.$$

3c. *Vis at den totale entropiendringen pr. sekund, $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t = \mathrm{d}(S_1 + S_2)/\mathrm{d}t$, kan skrives på formen $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t = K(T_2 - T_1)^2/(T_1 T_2)$. Kommenter fortegnet til $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t$ og bestem den positive konstanten K uttrykt ved A, b og κ.*

Av resultatet ovenfor følger at

$$\frac{\mathrm{d}(S_1+S_2)}{\mathrm{d}t} = J(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}) = \frac{\kappa A}{b}\cdot\frac{(T_2-T_1)^2}{T_1T_2},$$

hvilket skulle bevises. Den totale entropiendringen er positiv, uansett fortegn på temperaturdifferansen (T_2-T_1). Dette er i samsvar med Clausius: I et termisk lukket system fører *alle* irreversible prosesser til entropiøkning.

3d. *Den generelle relasjonen* $J=\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t=(\mathrm{d}Q/\mathrm{d}T)(\mathrm{d}T/\mathrm{d}t)$ *gir i vårt tilfelle*

$$J = m_1c\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = -m_2c\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t},$$

der c er kopperets varmekapasitet pr. masseenhet. Bruk dette og relasjonen i pkt.3a til å vise at temperaturutjevningens tidsforløp er gitt av differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}\Delta T}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}\Delta T(t) \quad ; \quad \Delta T(t) = T_2(t)-T_1(t).$$

Hva er løsningen av denne ligningen? Bestem tidskonstanten τ *uttrykt ved* $m_1,\ m_2,\ A,\ b,\ \kappa$ *og* c.

Vi har at

$$\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = \frac{J}{m_1c} \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{J}{m_2c}.$$

Derved er

$$\frac{\mathrm{d}\Delta T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{1}{m_2c}-\frac{1}{m_1c}\right)J = -\frac{m_1+m_2}{c\cdot m_1m_2}\cdot\frac{\kappa A\Delta T}{b} = -\frac{1}{\tau}\Delta T,$$

med

$$\tau = \frac{cb\cdot m_1m_2}{\kappa A\cdot(m_1+m_2)}.$$

Løsningen av ligningen er

$$\frac{\mathrm{d}\Delta T}{\Delta T} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau} \quad\Rightarrow\quad \ln\Delta T = -t/\tau + C \quad\Rightarrow\quad \Delta T(t) = \Delta T(0)\exp(-t/\tau).$$

3e. *Bestem* τ *når* $m_1 = 1\,\mathrm{kg},\ m_2 = 3\,\mathrm{kg},\ \kappa = 0.14\,\mathrm{W/(m\cdot K)}$ (typisk verdi for gran), $A = (5\,\mathrm{cm})^2,\ b = 1\,\mathrm{cm},\ c = 0.39\ \mathrm{kJ/(kg\cdot K)}$.

Vi finner

$$\tau = \frac{1\cdot3\cdot0.39\cdot10^3\cdot0.01}{0.14\cdot25\cdot10^{-4}(1+3)}\mathrm{s} = 8357\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{timer}\,19\,\mathrm{minutter}.$$

Antakelsen om at prosessen er "kvasisatatisk" er tydeligvis god.

09.01.10, E.H.Hauge