Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653 eller 90 07 51 72

Eksamen i fag TFY 4135 Fysikk
Tirsdag 30. mai 2006
Tid: 9.00–13.00

Sensurfrist: Tirsdag 20. juni 2006

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ C): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematisk formelsamling.*
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
C. Angell og B.E. Lian, *Fysiske størrelser og enheter.*
K.J. Knutsen, *Formler og data i fysikk.*

Noen nyttige konstanter:

Lyshastigheten i vakuum:	$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
Permeabiliteten i vakuum:	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$
Permittiviteten i vakuum:	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8,854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$

Oppgave 1:

At et intervall mellom to toner er en oktav, betyr at den ene tonen har dobbelt så høy frekvens som den andre. Oktaven deles gjerne i 12 halvtonetrinn. Hvis h er forholdet mellom frekvensene i et halvtonetrinn, så er altså $h^{12} = 2$, slik at

$$h = \sqrt[12]{2} = 1{,}059463 \; .$$

Hvor fort kjører en brannbil når den kjører forbi med konstant fart, og sirenen høres en heltone (to halvtoner) lavere etter at bilen har passert?

Doppler-effekten for lyd:

$$f_m = \frac{v + v_m}{v + v_s}\, f_s \; .$$

Her er f_s og f_m frekvensene som sendes og som mottas, v er lydhastigheten, $v = 340$ m/s i luft, v_s og v_m er hastighetene til sender og mottager.

Oppgave 2:

a) Hva er Huygens's prinsipp?
Forklar kort hvordan det kan brukes til å utlede Snells brytningslov for en plan lysbølge som treffer en grenseflate mellom to medier:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \ .$$

Her er $n_1 = c/c_1$ brytningsindeksen i medium 1, definert som forholdet mellom lyshastigheten c i vakuum og lyshastigheten c_1 i mediet. Vinkelen θ_1 i medium 1 er vinkelen mellom forplantningsretningen til bølgen og innfallsloddet, dvs. normalen til grenseflaten mellom mediene. Tilsvarende gjelder for medium 2.

Snells brytningslov kan også skrives slik:

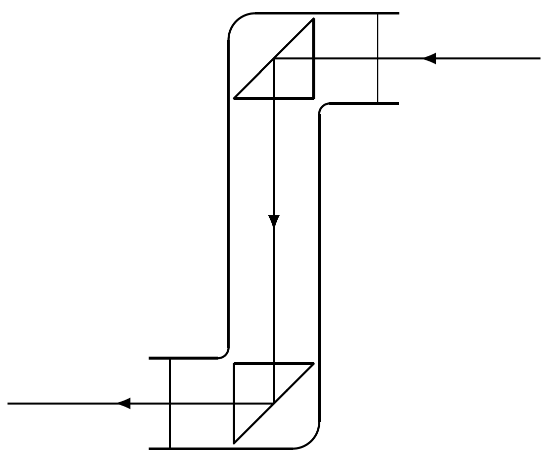
$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2} \ .$$

b) Hva er betingelsen for totalrefleksjon av en lysbølge fra en grenseflate mellom to medier?

Figuren viser i et skjematisk snitt hvordan et periskop kan konstrueres. Et metallrør bøyd to ganger i rett vinkel er lukket med glassvindu i begge endene. Lyset som kommer inn øverst, totalreflekteres i to glassprismer med trekantet tverrsnitt.

Vil periskopet fungere hvis det lekker og blir fylt med vann?

Brytningsindeksene er $n_\ell = 1{,}0003$ for luft, $n_v = 1{,}33$ for vann og $n_g = 1{,}52$ for glass.



c) Gjelder Snells brytningslov for lydbølger?
Kan en dykker under vann høre en hund som bjeffer inne på land?
Lydhastigheten er 340 m/s i luft og 1480 m/s i vann.

Oppgave 3:

Det elektriske feltet over en stor flat plen er

$$\vec{E} = -E_0 \vec{k} \ ,$$

der $\vec{k}$ er en enhetsvektor som peker rett oppover, og $E_0 = 180$ V/m.

a) Kilden til dette elektriske feltet er en overflatetetthet av elektrisk ladning på bakken. Beregn tettheten av overflateladning (bruk f.eks. Gauss's lov, se vedlegg s. 6). Er overflateladningen positiv eller negativ?

En flaggstang som står midt på plenen, har en messingkule i toppen med en radius på 10 cm, mye mindre enn høyden av flaggstangen. Vi antar at flaggstangen er laget av et dielektrisk (isolerende) materiale med dielektrisitetskonstant lik 1. Vi antar også at flaggstangen og messingkulen ikke er elektrisk ladd, bortsett fra at det elektriske feltet forandrer ladningsfordelingen på kuleoverflaten.
Vi velger et koordinatsystem med origo i sentrum av messingkulen, med z-aksen vertikalt oppover og x- og y-aksene horisontale.
Det elektriske feltet forandres på grunn av messingkulen. Potensialet utenfor kulen er

$$V = V(x, y, z) = E_0 z + \frac{Az}{r^3} \ ,$$

der A er en konstant, og der $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Dette uttrykket for V er en god tilnærming i alle punkter der avstanden r fra sentrum av kulen er mindre enn avstanden ned til bakken.

b) Regn ut det elektriske feltet $\vec{E} = -\nabla V$ utenfor kulen.
Hva er det elektriske feltet inne i kulen, hvis den består av massivt metall, uten hulrom?
Hva er det elektriske feltet inne i kulen, hvis den er hul og fylt med luft?
Følgende formler kan være nyttige:

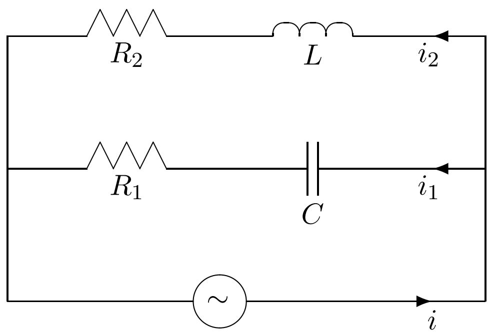
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \ , \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \ , \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \ .$$

c) Kuleoverflaten må være en ekvipotensialflate. Hvorfor?

d) Hvilken verdi må konstanten A ha?
Skisser ekvipotensialflater og elektriske feltlinjer like utenfor messingkulen i et vertikalsnitt gjennom origo.

Oppgave 4:

To motstander med resistanser $R_1 = 100\ \Omega$ og $R_2 = 1000\ \Omega$, en spole med induktans $L =$ 0,1 H og en kondensator med kapasitans $C = 10$ pF koples slik:



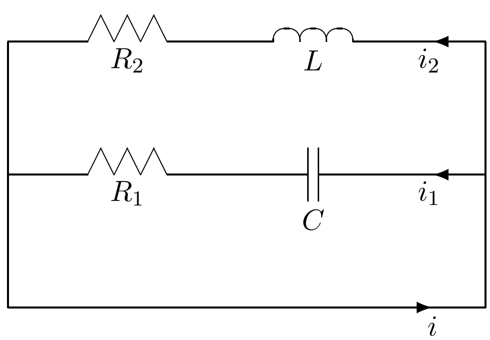
Spenningskilden vist i figuren leverer en vekselspenning $v = v(t)$ med vinkelfrekvens ω.
Nyttige formler: se vedlegg s. 6.

a) Utled følgende ligninger for spenningen $v(t)$ og strømmene $i_1(t)$ og $i_2(t)$:

$$v = R_2\, i_2 + L\, \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\ ,$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R_1\, \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{C}\ .$$

b) Vi setter først $v = 0$, det vil si at vi ser på denne kretsen:



Vis at da vil strømmene i_1 og i_2 avta eksponensielt med tiden t,

$$i_1 = A\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{t_1}}\ , \qquad i_2 = B\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{t_2}}\ ,$$

der A, B, t_1 og t_2 er konstanter. Bestem tidskonstantene t_1 og t_2 (både generelle formler uttrykt ved R_1, R_2, L og C, og tallverdier).

c) Mer generelt kan vi sette inn i ligningene for v, i_1 og i_2 de komplekse eksponensialfunksjonene

$$v = v_0\, \mathrm{e}^{j\omega t} \,, \qquad i_1 = A\, \mathrm{e}^{j\omega t} \,, \qquad i_2 = B\, \mathrm{e}^{j\omega t} \,,$$

der $j = \sqrt{-1}$, og der v_0, A og B er komplekse konstanter. Den fysiske spenningen er realdelen av den komplekse spenningen v, og de fysiske strømmene er realdelene av de komplekse strømmene i_1 og i_2.

Vis at sammenhengen mellom spenningen v og den totale strømmen $i = i_1 + i_2$ kan skrives som $v = Zi$, der impedansen Z er gitt ved at

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_1 - \frac{j}{C\omega}} + \frac{1}{R_2 + jL\omega} \,.$$

d) Regn ut tallverdier for Z i tre spesialtilfeller:

i) $\omega \to 0$ (likestrøm);
ii) $\omega \to \infty$;
iii) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Kommenter gjerne svarene.

e) Den komplekse impedansen Z avhenger av vinkelfrekvensen ω. Hvis $Z = 0$, kan vi ha null spenning, $v = 0$, og likevel en strøm $i \neq 0$.

For hvilke komplekse verdier av ω er $Z = 0$?

Hva er sammenhengen mellom ligningen $Z = 0$ og punkt b) ovenfor?

Vedlegg

Gauss's lov

Sammenheng mellom den elektriske fluksen ut gjennom en lukket flate og ladningen Q innenfor flaten:

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \ .$$

Kirchhoffs regler

Summen av strømmer inn i et knutepunkt (en node) er null.
Summen av spenningsfall rundt en lukket krets er null.

Regneregler for vekselstrøm

For vekselstrøm med frekvens f og vinkelfrekvens $\omega = 2\pi f$ kan vi regne med kompleks spenning $v = v(t) = v_0\,\mathrm{e}^{j\omega t}$ og kompleks strøm $i = i(t) = i_0\,\mathrm{e}^{j\omega t}$. Her er $j = \sqrt{-1}$, og t er tiden. v_0 og i_0 er konstante amplituder. som godt kan være komplekse: $v_0 = |v_0|\,\mathrm{e}^{j\alpha}$ og $i_0 = |i_0|\,\mathrm{e}^{j\beta}$, der α og β er fasevinkler. Den fysiske spenningen og den fysiske strømmen er realdelene av v og i:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, v &= |v_0| \cos(\omega t + \alpha) \ , \\ \mathrm{Re}\, i &= |i_0| \cos(\omega t + \beta) \ . \end{aligned}$$

For en resistans R gjelder Ohms lov $\quad v = Ri.$

For en induktans L gjelder relasjonen $\quad v = L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = jL\omega i \ .$

For en kapasitans C gjelder relasjonen $\quad i = C\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = jC\omega v \ .$

I alle tilfeller gjelder at $v = Zi$, der impedansen Z er gitt som:

$$\begin{aligned} Z &= R && \text{for en resistans,} \\ Z &= jL\omega && \text{for en induktans,} \\ Z &= -\frac{j}{C\omega} && \text{for en kapasitans.} \end{aligned}$$

Ved seriekopling av to impedanser Z_1 og Z_2 adderes spenningene, det gir den totale impedansen

$$Z = Z_1 + Z_2 \ .$$

Ved parallellkopling adderes strømmene, det gir at

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \ .$$