NTNU
Det skapende universitet

Institutt for Fysikk

Eksamensoppgave i FY1002 og TFY4160 BØLGEFYSIKK

Faglig kontakt under eksamen: Prof. em. J. Høye, Prof. M. Kildemo (kun per telefon)

Tlf.: 90686910 (Prof. em. J. Høye)

Tlf.: 93287744 (Prof. M. Kildemo)

Eksamensdato: 18/12/2013

Eksamenstid (fra-til): 15:00-19:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Nivå C. Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i samsvar med NTNUs regler. Trykte hjelpemidler: “Matematisk Formelsamling” (Rottmann), ”Størrelser og Enheter i Fysikk og Teknikk,” (O. Øgrim og B. E. Lian) eller ”Fysiske Størrelser og Enheter,” (C. Angell og B. E. Lian).

Annen informasjon:

Totalt antall poeng for skriftlig eksamen er 100. Disse vil være grunnlaget for evalueringen. For studenter med godkjent labrapport høst 2013 teller labrapporten 10% og avsluttende eksamen 90% på karakteren.

Målform/språk: Bokmål

Antall sider: 17 (inkludert denne forsiden)

Antall sider vedlegg: Svar ark, 1 side, side 8. Formelsamling, 9 sider, side 9-17.

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 [29p] (Akustiske bølger) Stående bølger i rør, refleksjon og transmisjon av propagerende bølger ved grenseflate:

a) [5p] En stående eller stasjonær bølge beskrives matematisk som:

$$D(x,t) = f(x)g(t), \tag{1.1}$$

som innsatt i bølgeligningen gir: $\frac{\ddot{g}}{g} = v^2 \frac{f''}{f}$. Av dette medfører at $\frac{f''}{f} = \text{konstant}$, der konstanten velges som $-k^2$. Utled med dette den generelle løsningen for $f(x)$ og $g(t)$ som funksjon av bølgetall, vinkelfrekvens, x og t.

b) [7p] Et rør har lengde L, med en åpen og en lukket ende.

- Hvilke grensebetingelser gjelder for en stående bølge i dette røret, for partikkelutsvinget fra likevekt $\xi(x,t)$ og trykkutsvinget fra likevekt $p(x,t) = -B\frac{\partial \xi}{\partial x}$? $\xi(0,t)$ og $p(L,t)$ følger fra fysiske vurderinger. Oppgi spesifikt løsningene for $\xi(x,t)$ og $p(x,t)$, av formen i ligning (1.1), som tilsvarer disse grensebetingelsene.

- Skisser profilen til trykkutsving og partikkelutsving fra likevekt for ***grunntonen.***

c) [5p] Røret har lengde L=1m og lydhastigheten er 330 m/s. Vi eksiterer stående bølger i røret. De harmoniske trykk-amplitudene er målt av en mikrofon. Vi måler frekvensen f=577.5 Hz. Hvilken harmonisk er dette (f.eks grunntonen, 1. harmoniske, 2. harmoniske, etc.)?

d) [12p] Gitt en propagerende akustisk bølge med normalt innfall på en grenseflate som skiller stoff 1 og stoff 2 (for eksempel luft og vann). Målet er å utlede amplituderefleksjon og transmisjon-koeffisentene til partikkelutsvingsbølgen. Den innfallende bølgen ***skal*** beskrives av partikkelutsvinget på formen:

$$\xi_i(x,t) = \xi_{0i} \sin\left(k_i x - \omega t\right) \tag{1.2}$$

Grensebetingelsene er oppgitt som kontinuitet i trykk og kontinuitet i partikkel hastighet (ev. fluid-element hastighet).

i. Skriv opp uttrykket for de innkommende $\xi_i(x,t)$, reflekterte $\xi_r(x,t)$ og transmitterte $\xi_t(x,t)$ partikkelutsvingsbølgene.

ii. Skriv opp de korresponderende uttrykkene for trykkutsvingsbølgene $p_i(x,t), p_r(x,t)$ og $p_t(x,t)$, og partkkelhastighetsbølgene $v_{pi}(x,t), v_{pr}(x,t)$ og $v_{pt}(x,t)$.

iii. Bruk de oppgitte grensebetingelsene og utled amplitude refleksjons- og transmisjons- koeffisienten for partikkelutsvingsbølgen som funksjon av bulk modulen B og tettheten ρ for stoffene på hver side av grenseflaten,

$$r = \frac{\xi_{0r}}{\xi_{oi}} \text{ og } t = \frac{\xi_{0t}}{\xi_{oi}}, \tag{1.3}$$

der ξ_{0i}, ξ_{0r} og ξ_{0t} er henholdsvis amplitudene til det lille utsvinget fra likevekt til den innfallende, reflekterte og transmitterte partikkelutsvingsbølgen.

Oppgave 2. [16p] Polarisasjon og geometrisk «optikk»

a) [8p] En EM bølge er gitt som:

$$\mathbf{E}(z,t) = 2\cos\; kz - \omega t\; \hat{\mathbf{x}} + \cos\left(kz - \omega t - \frac{\pi}{2}\right)\hat{\mathbf{y}} \qquad (2.1)$$

Utled hvilken polarisasjonstilstand dette er, inklusiv dreieretning når en ser inn i strålen langs *z*-aksen (dvs: mot bølgens forplantningsretning). Det kreves «bevis» og en standard skisse som viser (spissen av) $\mathbf{E}(0,t)$ i *x*,*y*-planet, med angitt dreieretning. Angi det korresponderende $\mathbf{B}(0,t)$ feltet.

b) [8p] Den empiriske Snells lov eller brytningsloven er gitt av

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2\,, \qquad (2.2)$$

og beskriver en geometrisk stråle som krysser en plan grenseflate mellom to medier, og kan utledes ved hjelp av Huygens prinsipp, Fermats prinsipp og for EM bølger ved hjelp av Maxwells ligninger.

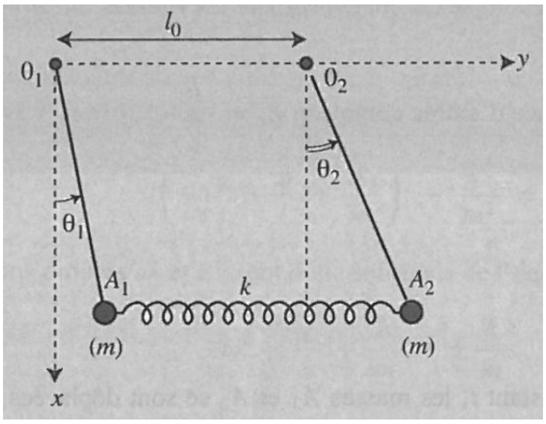
i. Forklar kort og ved hjelp av en skisse, Fermat's prinsipp for å utlede brytnings-loven.

ii. Utled Snells brytningslov ved å kreve at komponenten til bølgevektorene parallelt til grense-flaten skal være like for det innkommende og det transmitterte EM feltet.*

* Denne betingelsen kommer fra grensebetingelsene til Maxwells ligninger ($\Delta\mathbf{E}_{\parallel} = 0$).

Oppgave 3. [14p] Koplede svingninger

To identiske pendler med masse m og lengde l, er koplet ved hjelp av ei vannrett fjær med fjærkonstant k, som knytter sammen pendlene A_1 og A_2, se Figur 3.1. Ved likevekt, så har fjæra sin naturlige lengde l_0.



Figur 3.1. Kopling mellom to ideelle matematiske pendler.

De to pendlene er lokalisert ved enhver tid t, ved hjelp av sine vinkelutslag θ_1 og θ_2 (antatt små) med hensyn til sin vertikale posisjon ved likevekt. Tyngdens akselerasjon er g. De andre-ordens koplede differensialligningene for systemet, for tilstandsvariablene $\theta_1(t)$ og $\theta_2(t)$, er gitt av:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l}\right)\theta_1 &= \frac{k}{m}\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{l}\right)\theta_2 &= \frac{k}{m}\theta_1 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

a) [8p]

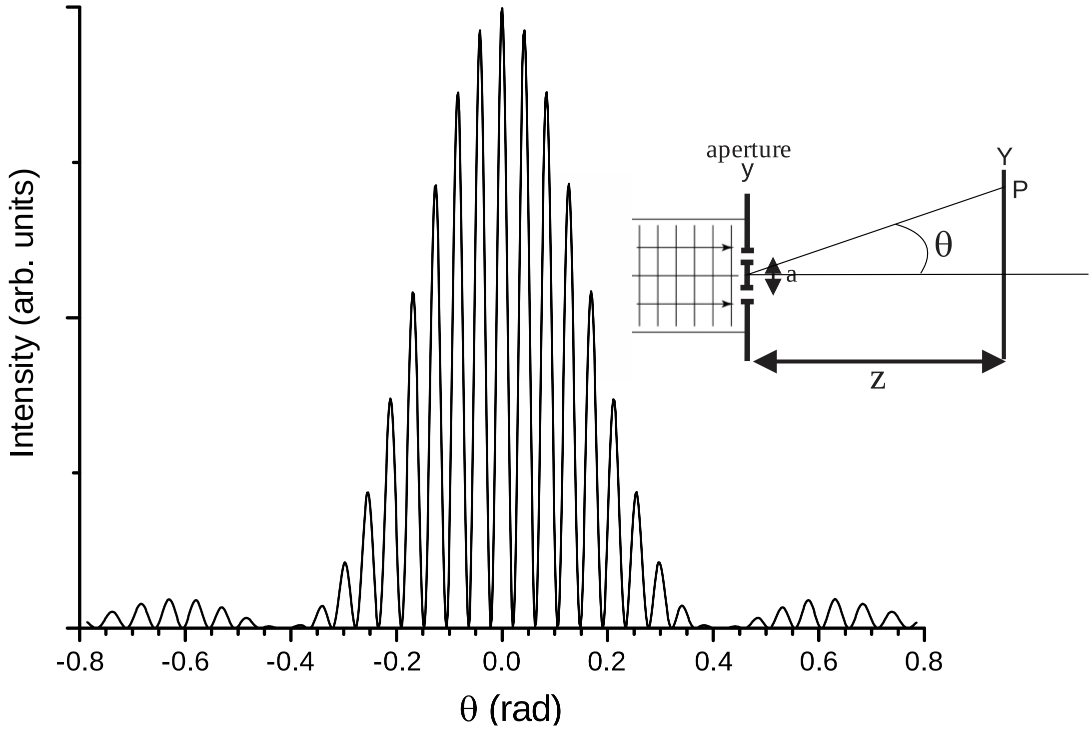
i. Finn vinkelfrekvensene for normalmodene (egenmodene) , ω' og ω''.

ii. Gi eksempel på initialbetingelser som vil gi svingning i disse egenmodene.

b) [6p] Vi lar massen A_2 i figur 3.1 utsettes for en påtrykt kraft $F = F_0 \cos(\omega t)$.

- Skriv opp de korresponderende differensialligningene for $\theta_1(t)$ og $\theta_2(t)$. (Du kan basere deg på ligningssettet i ligning 3.1).
- Hva forventer du vil skje for $\omega = \omega'$?

Oppgave 4 [16p] Interferens og diffraksjon (EM bølger)



Figur 4.1. Figuren viser intensiteten observert på skjermen. Figuren i høyre hjørne viser en plan EM-bølge med normalt innfall på to spalter.

Et Youngs dobbeltspalte diffraksjonseksperiment består av to lange spalter (rektangulære hull) i ei plate, der avstanden mellom spaltene er a, bredden til hver spalte er b, og det er her totalt 2 spalter. Vi neglisjerer intensiteten langs X-aksen på skjermen, da vi antar at høyden til spaltene er stor i forhold til bølgelengden. Ved å belyse spaltene med en plan harmonisk (linærpolarisert/skalar) elektromagnetisk bølge med bølgelengde λ og bølgetall k, så kan vi observere et «diffraksjonsmønster» på skjermen. I Fraunhofer diffraksjonsgrensen observeres en tidsmidlere intensitet gitt av ligningen:

$$\langle I(\theta)\rangle \sim 4\frac{I_0}{r^2}\left(\frac{\sin(\beta)}{\beta}\right)^2 \cos^2(\alpha) \ , \tag{4.1}$$

der $\beta = \frac{1}{2}kb\sin\theta$, $\alpha = \frac{1}{2}ka\sin\theta$, $I_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$ er intensiteten til den innkommende bølgen, og r er avstanden mellom vilkårlig punkt P på skjermen og midtpunktet mellom spaltene.

a) [8p] Interferensleddet i ligning 4.1 kan utledes med å summere feltet fra kulebølger fra hver av spalteåpningene. Vis dette.

b) [8p] Ved å lese ut fra intensitetsmønsteret i figur 4.1, finn både spaltebredden og avstanden mellom spaltene, gitt at λ = 514 nm.

Merknad. Oppgave (b) kan løses uten oppgave (a).

Oppgave 5 [12p] Bølgepakker og dispersjon

a) [7p] En bølgepakke* er oppgitt som

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \Delta k \cos\; k_0 x - \omega_0 t\; \mathrm{sinc}\left(\frac{\Delta k}{2}\left(x - t\frac{d\omega}{dk}\bigg|_{k_0}\right)\right), \tag{5.1}$$

hvor det er antatt at $\Delta k << k_0$. Oppgitt at $\mathrm{sinc}\; x \; = \sin(x)/x$.

i. Lag en skisse av $\xi(x,0)$ og $\xi(x,t_{konst})$ der t_{konst} er en valgt konstant>0. Skisser to kurver ovenfor hverandre med felles x-akse. **Bruk vedlagt svar-ark**. Skissen skal være enkel, men klar nok til å evaluere din forståelse av bølgeforplantning, med angitt fasehastighet og gruppehastighet.

ii. Hva skjer med uttrykket i ligning (5.1) i grensen når $\Delta k \to 0$. Anta at $\xi_0 \Delta k = \mathrm{konstant}$.

b) [5p] La bølgepakken ovenfor beskrive vannbølger, og vi antar at vi har tyngdebølger med dispersjonsrelasjonen

$$\omega^2 = gk \tanh\; kd \;,$$

der g=9.8 m/s^2 og d er vannets dybde. For hvilke vanndybder har vi en ikke-dispersiv bølgepakke?

*Denne bølgepakken har vi i kurset utledet for en fordeling av amplituder i bølgetalls-rommet gitt av:

$$\xi_0(k) = \begin{cases} \xi_0 & \text{for } (k_0 - \Delta k/2) \le k \le (k_0 + \Delta k/2) \\ 0 & \qquad\qquad ellers \end{cases}.$$

Videre har vi brukt at $\hat{\xi}(x,t) = 2\int_0^\infty \xi_0(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$, der $\xi(x,t) = Re(\hat{\xi}(x,t))$,

og rekkeutviklet dispersjonsrelasjonen slik at $\omega(k) = \omega_0 + \; k - k_0 \; \frac{d\omega}{dk}\bigg|_{k_0}$.

Oppgave 6. [13p] Stråletrykk, impulsbevarelse og spesiell relativitet

En laserstråle med bølgelengde 1400 nm, med total effekt 1 W reflekteres fra et lite speil.

a) [8p]

i. Hvor mange fotoner når speilet per sekund?

ii. Hva er den totale kraften som virker på speilet?

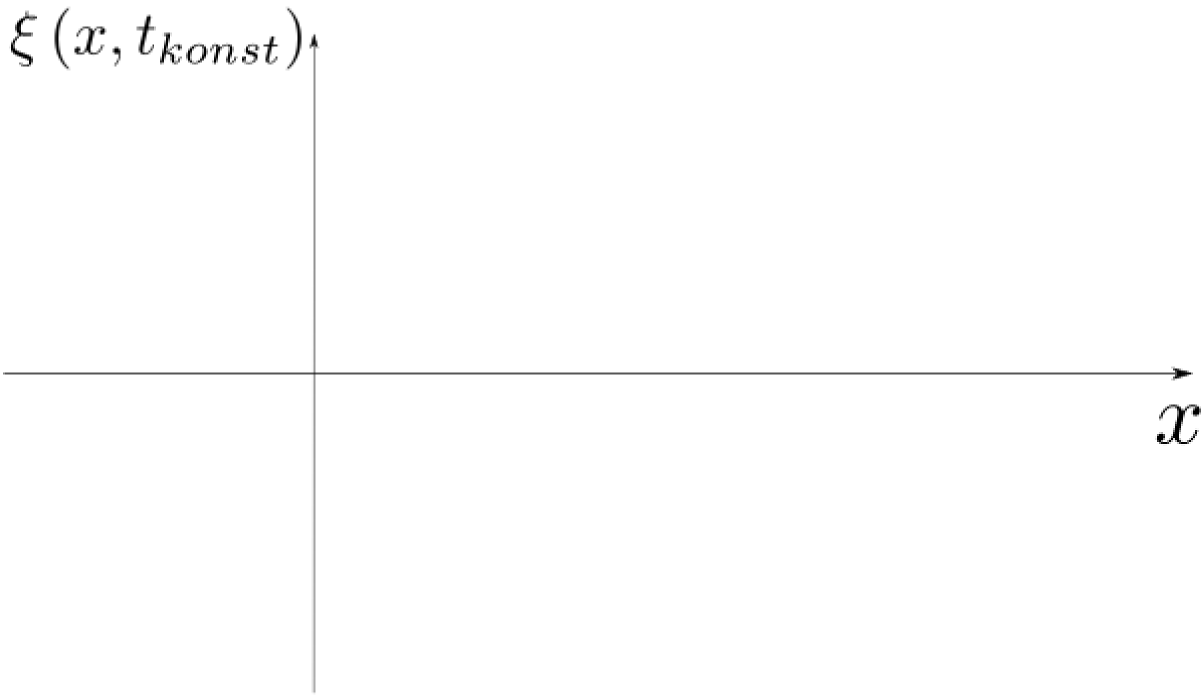
Oppgitt: Fotonets energi $E = hf$, relasjonen $E^2 = m^2c^2 + p^2c^2$, og $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js .

b) [5p] Et He atom med hastighet $v = 0,7c$ i retning mot laserstrålen (hastighet målt i laboratoriesystemet), der c er lyshastigheten. Hvilken bølgelengde vil en måle i hvilesystemet(referansesystemet) til He- atomet?

Slutt på eksamen. Lykke til. God Jul.

Svar Ark, Oppgave 5a

Kandidatnr.:……………………….
Dato:……… Side:…………….
Antall Ark:.……………………….



$t_{konst} = konstant > 0$

Formelsamling

Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:
$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$
$$\xi(\boldsymbol{r},t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:
$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2 \xi(\boldsymbol{r},t) \left(\equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:
$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:
$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:
$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:
$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:
$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:
$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:
$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over bølgelengde λ:

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda A(x,t)\,dx$$

Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over periode T:

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^T A(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T A(x,t)\,dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_BT$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk (Q = varme):

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum (Q = varme):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmeutveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Gass med 1-atomige molekyler: $\gamma = 5/3$. Gass med 2-atomige molekyler: $\gamma = 7/5$.

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass (m = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

med $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

- Dopplereffekt for lydbølger:

$$\nu_\text{O} = \frac{1 - v_\text{O}/v}{1 - v_\text{S}/v}\, \nu_\text{S}$$

- For sjokkbølger gjelder:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_\text{S}}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet μ_1 for $x < 0$ og μ_2 for $x > 0$, innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:

  $$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} \, y_{i0}$$

  Amplitude for transmittert bølge:

  $$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} \, y_{i0}$$

  Refleksjonskoeffisient:

  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

  Transmisjonskoeffisient:

  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i $x = 0$ mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis E_1, ρ_1 (for $x < 0$) og E_2, ρ_2 (for $x > 0$), innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:

  $$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \, \xi_{i0}$$

  Amplitude for transmittert bølge:

  $$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \, \xi_{i0}$$

  Refleksjonskoeffisient:

  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

  Transmisjonskoeffisient:

  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

- Bølgeligning for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i vakuum:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \boldsymbol{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol $p_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol $m_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$$

- Lineære medier:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{M} &= \chi_m \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} + \mu_0 \boldsymbol{M} = \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \\
\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} &= q_{\text{fri}} \\
\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} &= 0 \\
\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} &= I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho_{\text{fri}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
u &= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \\
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{\mu} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \boldsymbol{B} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ i grenseflaten):

$$\begin{aligned} \Delta D_\perp &= 0 \\ \Delta E_\parallel &= 0 \\ \Delta B_\perp &= 0 \\ \Delta H_\parallel &= 0 \end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\theta_r = \theta_i$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

- Diffraksjonsgitter med N smale spalter:

$$I(\theta) = I_0 \, \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0) \, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}$$

- Diffraksjon fra N spalter, spaltebredde a, spalteavstand d:

$$I(\theta) = \hat{I} \, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ($\overline{S}$ har hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \gamma\,(x - vt)\\ \overline{y} &= y\\ \overline{z} &= z\\ \bar{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \gamma\left(\overline{x} + v\bar{t}\right)\\ y &= \overline{y}\\ z &= \overline{z}\\ t &= \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\overline{x}\right)\end{aligned}$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma \Delta \bar{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta \overline{x} = \gamma \Delta x$$

- Hastighet i S ($\boldsymbol{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

Hastighet i $\overline{S}$ ($\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{u}_x\hat{x} + \overline{u}_y\hat{y} + \overline{u}_z\hat{z}$):

$$\overline{u}_x = d\overline{x}/d\bar{t}$$

$$\overline{u}_y = d\overline{y}/d\bar{t}$$

$$\overline{u}_z = d\overline{z}/d\bar{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\overline{\nu} = \nu \left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

- Energi:

$$\begin{aligned} E &= \gamma m c^2 \\ E_0 &= mc^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess: E, $\boldsymbol{p}$, E_k og m bevart.
- Uelastisk prosess: E og $\boldsymbol{p}$ bevart.