Eksamen i fag TFY4165
Termisk fysikk, den 13/8-2008.

Forslag til Løsning.

Oppgave 1.

a) Den termodynamiske identitet er

$$T\,dS = dU + p\,dV$$

Nå er videre $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$

som innsatt gir

$$dS = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right) dV$$

Da S er tilstandsfunksjon vil dS være totalt differensial og vi finner

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right] = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} - \frac{1}{T^2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

Da disse 2 uttrykkene må være lik hverandre får vi følgelig

$$\frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} = \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} - \frac{1}{T^2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$\underline{\underline{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p}}$$

b) For å bestemme indre energi U benyttes

$$dU = C_V\,dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad , \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

Resultatet fra pkt. a) benyttes til å bestemme $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ og Van der Waals tilstandslikning benyttes i tillegg.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\cdot\frac{R}{V-b} - p = \frac{a}{V^2}$$

eller $dU = C_V\,dT + \frac{a}{V^2}dV$

Integrering gir så

$$U = f(T) - \frac{a}{V} = \underline{\underline{C_V T - \frac{a}{V}}} \ (+\text{konst})$$

($f(T)$ er integrasjonskonstant ved integrering m.h.p. V)

Entropien bestemmes ved å sette inn resultatet fra pkt. a) i den termodynamiske identitet

$$dS = \frac{1}{T}C_V\,dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV =$$

$$\frac{C_V}{T}dT + \frac{R}{V-b}dV$$

Integrering gir så

$$S = f(T) + R\ln(V-b) = C_V \ln T + R\ln(V-b) + K$$

Integrasjonskonstanten K bestemmes ved at $S = S_0$ ved $T = T_0$ og $V = V_0$

$$\underline{\underline{S = C_V \ln\left(T/T_0\right) + R\ln\left(\frac{V-b}{V_0-b}\right) + S_0}}$$

Oppgave 2

a) Fra $G = U - TS + pV$ finner en først

$$dG = dU - TdS - SdT + pdV + Vdp$$

Dette benyttes så til å eliminere dU i den termodynamiske identitet

$$TdS = dU + pdV$$

som så gir

$$dG = -SdT + Vdp$$

Av dette finner en først

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S \quad \text{og} \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V$$

Ved å derivere 2 ganger finner en så

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)$$

eller

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Når en erstatter U med $H = U + pV$ i den termodynamiske identitet finnes

$$dH = dU + pdV + Vdp$$

som innsatt gir

$$TdS = dH - Vdp$$

Fra denne likningen følger så

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V$$

Ved å benytte Maxwellrelasjonen følger dermed

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V + T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

b) For Joule-Thompson koeffisienten finner vi

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{-1}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial H}\right)_T} = \frac{-1}{C_p}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T$$

Her har vi først benyttet $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_T \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1$.

Videre er $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z^{-1} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ benyttet, og til slutt er spesifikk varme ved konstant trykk

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$$

Ved å sette inn resultatet fra punkt a) følger så

$$\mu_{JT} = \frac{1}{C_p}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right]$$

c) Differensiering av tilstandslikningen gir

$$0 = dp = \left(\frac{R}{V} + \frac{dB}{dT}\frac{1}{V^2}\right)dT - \left(\frac{RT}{V^2} + 2\frac{B}{V^3}\right)dV$$

$$T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V\left(R + \frac{dB}{dT}\frac{1}{V}\right) \Big/ \left(R + 2\frac{B}{TV}\right)$$

og følgelig

$$\mu_{JT} = \frac{1}{C_p}\left(T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right)$$

$$= \frac{1}{C_p} V\left(R + \frac{dB}{dT}\frac{1}{V} - R - 2\frac{B}{TV}\right) \Big/ \left(R + 2\frac{B}{TV}\right) = \left(\frac{dB}{dT} - \frac{2B}{T}\right) \Big/ \left(R + 2\frac{B}{TV}\right)$$

$$\xrightarrow[V \to \infty]{} \frac{1}{R}\left(\frac{dB}{dT} - \frac{2B}{T}\right)\frac{1}{C_p}$$

Oppgave 3.

a) Ved derivering finner en

$$\nabla^2 T = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{A}{r} + B\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{A}{r^2}\right) - \frac{2A}{r^3} = \underline{\underline{0}}$$

som viser at varmeledningslikningen er oppfylt. Grensebetingelsene gir likningene

$$\frac{A}{R_1} + B = T_1$$

$$\frac{A}{R_2} + B = T_2$$

som gir

$$A\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = T_1 - T_2$$

$$A = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \underline{\underline{\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}(T_1 - T_2)}}$$

$$B = T_2 - \frac{A}{R_2} = T_2 - \frac{R_1}{R_2 - R_1}(T_1 - T_2) = \underline{\underline{\frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{R_2 - R_1}}}$$

Den radielle varmestrømtettheten er gitt ved

$$j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r} = -\kappa \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A}{r} + B\right) = \frac{\kappa A}{r^2}$$

Med kuleareal $S = 4\pi r^2$ blir varmestrømmen:

$$\dot{Q} = S j = 4\pi r^2 \frac{\kappa A}{r^2} = \underline{\underline{4\pi\kappa \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}(T_1 - T_2)}}$$

Følgelig

$$\underline{\underline{D = 4\pi\kappa \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.}}$$

b) Ved å løse uttrykket for D med hensyn på κ finner en

$$\kappa = \frac{(R_2 - R_1)D}{4\pi R_1 R_2} = \frac{(0{,}15 - 0{,}10)\,\mathrm{m} \cdot 0{,}18\,\mathrm{W/K}}{4\pi\, 0{,}10 \cdot 0{,}15\,\mathrm{m}^2} = \underline{\underline{0{,}048 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}}}.$$

Volum av hulrom

$$V = \frac{4\pi}{3} R_1^3.$$

Vekten av isen blir da $M = \rho V$ slik at total smeltevarme blir $Q = ML$. Tiden for å smelte isen blir følgelig

$$t = \frac{Q}{|\dot{Q}|} = \frac{\rho V L}{|\dot{Q}|} = \frac{4\pi \rho R_1^3 L}{3 \cdot D(T_2 - T_1)} =$$

$$\frac{4\pi \cdot 0{,}92\,\mathrm{kg/dm^3}(1{,}0\,\mathrm{dm})^3 \cdot 333\,\mathrm{kJ/kg}}{3 \cdot 0{,}18\,\mathrm{W/K} \cdot (20-0)\,\mathrm{K}} = \underline{\underline{3{,}56 \cdot 10^5\,\mathrm{s}}} =$$

$$\underline{\underline{99\ \text{timer} = 4{,}1\ \text{døgn}}}.$$

c) Når alle lengder endres med en faktor α endres tiden med en faktor α^2. Med dette blir tiden for smelting

$$t_\alpha = \alpha^2 t = 1{,}2^2 t = \underline{\underline{5{,}13 \cdot 10^5\,\mathrm{s} = 142\ \text{timer} = 5{,}9\ \text{døgn}.}}$$