Institutt for fysikk 2006

TFY4180 Fysikk (for Energi & miljø)
Kont.eksamen 7.aug. 2006. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h
Rett svar:	E	C	E	B	D	B	D	E

Detaljer om spørsmålene:

a) E. Feltet fra Q_1 og Q_2 opphever hverandre og feltet fra Q_2 peker i retning fra P og mot venstre. Derfor er ingen av A-D rett.

b) C. Feltfritt i metallet gir at 1 forkastes. Totalladning $-Q$ (negativ) gjør at ytterste feltlinjer må gå innover. Med én Q representert ved fire feltlinjer ser vi at C er rett.

c) E. Nålas magnetiske moment $\vec{\mu}$ går langs nåla fra S til N. Når magnetisk moment peker parallelt eller antiparallelt med B-feltet er det intet moment på nåla, idet $\tau = \vec{\mu} \times \vec{B}$, og dermed ingen krefter.

d) B. Magntefeltlinjer løper ut fra N-pol og inn mot S-pol. Når magneten beveger seg mot ringen øker magnetfluksen i retning venstre, og for å motveie dette (Lenz' lov) settes det opp en strøm ifølge høyrehåndsregelen som går i angitt retning. Altså B rett.

e) D. Resultantkraft = Lorentzkrafta = $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Skal denne være null må $\vec{v} \times \vec{B}$ ha retning motsatt $\vec{E}$, dvs. i negativ x-retning. Da må $\vec{v}$ ha retning i positiv z-retning, etter høyrehåndsregelen.

f) B. Førsteharmoniske (grunntonen) har én buk mellom de to fastspente punkt, andreharmoniske har to buker og derfor knutepunkt ved endene og midt på.

g) D. Fra vann til luft brytes strålen *fra* innfallsloddet, den må derfor treffe ved starten for 4 eller 5. Fra luft til vann brytes den mot innfallslinja, derfor er 4 rett.

h) E. $\vec{E}$ og $\vec{B}$ er alltid i fase i vakuum. Derfor E feil mens alle andre er rett.

Oppgave 2. Elektrostatikk.

a) P.g.a. sylindersymmetri kan $\vec{E}$ kun ha radiell komponent, som betyr den kan skrives $\vec{E} = E_r\,\hat{\mathbf{r}}$. Vi bruker Gauss' lov for en sylinder med radius r og lengde ℓ: $\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q_{\text{encl}}$. På endeflatene er $\vec{E} \| \mathrm{d}\vec{A}$ og på sylinderflata er $\vec{E}$ konstant og normal på flata med totalt areal $2\pi r\ell$ som da gir

$$\epsilon_0 E_r \cdot 2\pi r\ell = \begin{cases} 0 & r < a \\ \lambda\ell & r \in [a,b] \\ 0 & r > b \end{cases} \qquad \text{altså kan vi skrive } \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{r}, \quad \text{der} \qquad \vec{E}_0 = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\,\hat{\mathbf{r}} & r \in [a,b] \\ \vec{0} & \text{ellers}\,. \end{cases}$$

b) Fra definisjon av elektrisk potensial:

$$V(a) - V(b) = -\int_b^a \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_b^a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \mathrm{d}r = \underline{-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\frac{a}{b} = E_0 \cdot \ln\frac{b}{a}}\,,$$

der vi har integrert radielt slik at $\mathrm{d}\vec{s} = \hat{\mathbf{r}}\ \mathrm{d}r$.

Nå er $V(b) = 0$ og idet $b > a$ og $\lambda > 0$ får vi at $V(a) > 0$. Et positivt ladd legeme har alltid høyere potensial enn et negativt.

c) Uttrykk for elektrostatisk energitetthet (energi per volum):

$$u = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\,.$$

Totalenergien finnes ved å integrere over sylindervolumet mellom $r = a$ og $r = b$ (der $E = E_0/r \neq 0$), med infinitesimalt sylindervolum $\mathrm{d}V = 2\pi r \mathrm{d}r \cdot \ell$. (Det er brukt W i oppgaveteksten, men bruker her U som er brukt for el.statisk energi på formelarket.)

$$W = U = \int_{\text{syl}} u \,\mathrm{d}V = \int_{\text{syl}} \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{E_0}{r}\right)^2 \cdot 2\pi r \mathrm{d}r \cdot \ell = \pi\epsilon_0 \ell E_0^2 \cdot \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \pi\epsilon_0 \ell E_0^2 \cdot \ln\frac{b}{a}\,.$$

Per lengdeenhet og innsatt E_0:

$$W' = U' = \frac{U}{\ell} = \pi\epsilon_0 \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \ln\frac{b}{a} = \underline{\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \ln\frac{b}{a}} \quad \left(= E_0^2 \cdot \pi\epsilon_0 \cdot \ln\frac{b}{a}\right).$$

Alternativt kan oppgaven løses ved å integrere over ladning, $U = \int \frac{1}{2} V \cdot \mathrm{d}q$. Det er ladning kun ved flatene $r = a$ og $r = b$, og dessuten er potensialet ved b lik null: $V(b) = 0$, slik at energi per lengdeenhet blir

$$U' = \frac{U}{\ell} = \frac{1}{2\ell}\left[V(a) \cdot \lambda\ell + V(b)(-\lambda)\ell\right] = \frac{1}{2} V(a) \cdot \lambda = \underline{\frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0} \ln\frac{b}{a}}\,.$$

Man må da altså ha funnet svaret på $V(a)$ i punktet ovenfor.

d) Enkleste måte å finne feltstyrken på er å bruke gradienten i sylinderkoordinater (ingen ϕ og z-avhengighet):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial}{\partial r}\left(V_0 \frac{b-r}{b-a}\right)\hat{\mathbf{r}} = \underline{V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{\mathbf{r}}}\,.$$

Romladningen finnes enklest fra $\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Med divergens for sylinderkoordinater får man

$$\rho(r) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(V_0 \cdot \frac{1}{b-a} \cdot \hat{\mathbf{r}}\right) = \epsilon_0 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot \frac{V_0}{b-a}\right) = \underline{\frac{\epsilon_0 V_0}{r(b-a)}}\,.$$

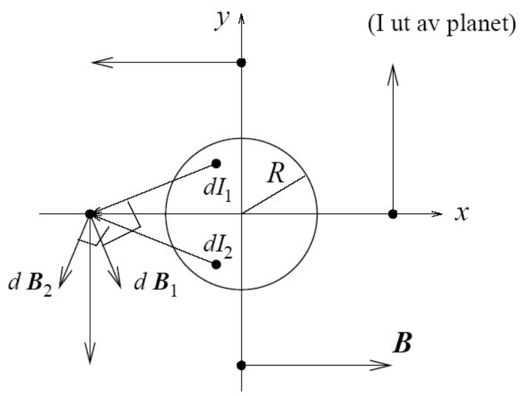
Dette gjelder $r \in [a, b]$. Utenfor er $\rho = 0$.

Oppgave 3. Magnetfelt

a) Total strøm i lederen finner vi ved å integrere strømtettheten $\vec{J}(r)$ over tverrsnittet av lederen. Arealelement normalt på strømretningen blir $\mathrm{d}A = 2\pi r \mathrm{d}r$, og da J varierer med r må vi integrere:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\text{tverrsnitt}} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_0^R J(r) \cdot 2\pi r \mathrm{d}r \\ &= 2\pi J_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{R}\right) \cdot \mathrm{d}r = 2\pi J_0 \left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{3}\frac{R^3}{R}\right) = \underline{\frac{\pi}{3} J_0 R^2}\,. \end{aligned}$$

b) Retningen på magnetfeltet $\vec{B}$ fra en lang, rett strømførende leder (med sylindersymmetrisk strømtetthet $\vec{J}$) blir overalt tangentielt til sirkler konsentriske med lederens symmetriakse. Med andre ord, feltlinjene for $\vec{B}$ blir nettopp slike konsentriske sirkler. I Figuren er $\vec{B}$ tegnet inn i de fire angitte punktene.



I figuren er det også vist hvordan to symmetrisk beliggende "strømelementer" $\mathrm{d}I_1$ og $\mathrm{d}I_2$ tilsammen gir et magnetfelt $\mathrm{d}\vec{B}_1 + \mathrm{d}\vec{B}_2$ på den mellomliggende symmetriaksen (her: x-aksen) med nevnte tangentielle retning. Følgelig må det totale feltet også ha en slik retning. Dette symmetriargumentet vil gjelde like bra både inne i og utenfor lederen, slik at dette blir retningen på $\vec{B}$ overalt. (Her var det ikke påkrevt med noe symmetriargumentasjon. Fire like lange, tangentielle vektorer i figuren er alt som skal til for å besvare oppgaven.)

c) Med tangentiell $\vec{B}$ overalt, og $B = |\vec{B}|$ kun avhengig av avstanden fra lederens senterakse, er det naturlig å velge "amperekurver" som sirkler med radius r, konsentriske med lederen. Amperes lov gir da

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 I_{\text{encl}} \qquad \Rightarrow \qquad B_{\text{u}}(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I(r)$$

der $I(r)$ er strømmen som passerer innenfor (dvs., som er omsluttet av) sirkelen med radius r.

Utenfor lederen er $I(r)$ som funnet i a) konstant for alle r:

$$I(r > R) = I_0 = \frac{\pi}{3} J_0 R^2 \,,$$

som gir magnetfeltet for $r > R$:

$$\underline{B_{\mathrm{u}}(r)} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I_0 = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{\pi}{3} J_0 R^2 = \underline{\mu_0 J_0 \frac{R^2}{6r}} \,.$$

d) Inni lederen finner vi

$$\begin{aligned} I(r < R) &= \int_0^r J(r') \cdot 2\pi r' \mathrm{d}r' \\ &= 2\pi\, J_0 \int_0^r \left(r' - \frac{r'^2}{R} \right) \cdot \mathrm{d}r' = 2\pi\, J_0 \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{3} \frac{r^3}{R} \right) = \pi\, J_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R} \right) . \end{aligned}$$

(Ser at uttrykket for $r = R$ stemmer med resultatet i a).) Fra Amperes lov (som gitt for B_{u} ovenfor) blir magnetfeltet inni lederen

$$B_{\mathrm{i}}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I(r < R) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \pi\, J_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R} \right) = \frac{\mu_0\, J_0}{2} r - \frac{\mu_0\, J_0}{3R} r^2$$

Altså er

$$C_1 = \underline{\frac{1}{2} \mu_0\, J_0} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \cdot 5,00 \cdot 10^4\,\mathrm{A/m^2} = \underline{0,0314\,\mathrm{T/m}} .$$

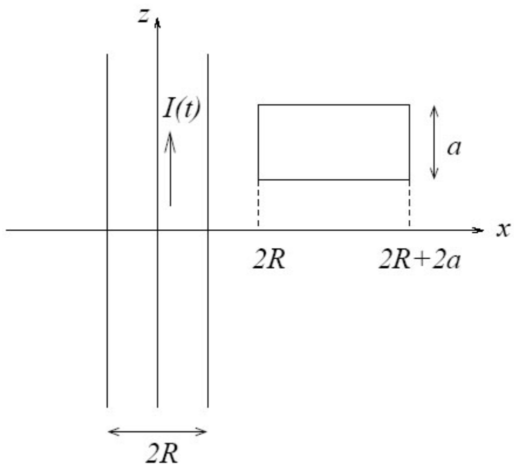
og

$$C_2 = \underline{-\frac{\mu_0\, J_0}{3R}} = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \cdot 5,00 \cdot 10^4\,\mathrm{A/m^2}}{3 \cdot 1,00 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = \underline{-2,09\,\mathrm{T/m^2}} .$$

(Enhet: H/m = Tm/A)

Oppgave 4. Magnetisk induksjon

Magnetfeltet $B(r,t)$ fra den rette strømførende lederen resulterer i en magnetisk fluks $\Phi_B(t)$ innenfor den rektangulære strømsløyfa. $\vec{B}$ i xz-planet (for positive x, dvs. der strømsløyfa er plassert) har retning langs positiv y-akse, dvs. inn i planet. Feltet $B(x)$ avtar med avstand $x = r$ fra lederens senterakse men er ikke avhengig av z, slik at vi må integrere med arealelementet $\mathrm{d}A = a\,\mathrm{d}x$. Flatenormalen til strømsløyfa er også en vektor i y-retning, slik at det blir enkelt å bestemme den magnetiske fluksen:



$$\Phi_B(t) = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{2R}^{2R+2a} C \frac{I(t)}{x}\, a\,\mathrm{d}x = C\, I(t)\, a \cdot \ln \frac{R+a}{R}$$

Med den oppgitte $I(t)$ finner vi at den induserte ems. i ledersløyfa blir

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -C\, \dot{I}(t)\, a \cdot \ln \frac{R+a}{R} \mathcal{E}(t) = -C\, (-\omega I_0 \sin \omega t)\, a \cdot \ln \frac{R+a}{R} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$$

med amplitude

$$\mathcal{E}_0 = \underline{C\, \omega I_0\, a \cdot \ln \frac{R+a}{R}}$$

Den som har funnet uttrykk for $B_{\mathrm{u}}(r)$ ovenfor vil lett se at $C = \dfrac{\mu_0}{2\pi} = 2,00 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$.

Oppgave 5. Bølger

a) Bølgefarta finner vi fra oppgitt formel på formelarket:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,0\,\mathrm{kN}}{0,010\,\mathrm{kg/m}}} = \underline{316\,\mathrm{m/s}}.$$

b) Vinkelfrekvensen er $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 400\,\mathrm{s}^{-1} = 2513\,\mathrm{s}^{-1} = \underline{2,51 \cdot 10^3\ \mathrm{s}^{-1}}$.

Bølgefart $v = \lambda/T = \lambda\, f$ (formelark) gir $\underline{\lambda = \frac{v}{f} = \frac{316\,\mathrm{m/s}}{400\,\mathrm{s}^{-1}} = 0,79\,\mathrm{m}}$ og bølgetallet $\underline{k = \frac{2\pi}{\lambda} = 7,95\,\mathrm{m}^{-1}}$.

c) Generell formel: $y(x,t) = y_0 \cdot \sin(kx \pm \omega t)$. Innsatt tallverdier funnet over gir dette:

$$\underline{y(x,t) = 0,50\,\mathrm{mm} \cdot \sin(7,95\,\mathrm{m}^{-1} \cdot x \ \pm\ 2,51 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t)}.$$

$\cos(\cdots)$ duger like godt som sin. Vi må ta med $\pm$ fordi bølgen vil bre seg utover i begge retninger.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 8. aug. 06.