Institutt for fysikk 2007

TFY4180 Fysikk (for Energi & miljø)
Eksamen 31. mai 2007. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Rett svar:	A	D	E	A	C	A	B	A	C	C	A

Detaljer om spørsmålene:

a) A. Mellom Q_1 og Q_2 må feltene gå i samme retning og kan ikke nulles ut. Utenfor ladningene går feltene i motsatt retning. Pkt. 5 er nærmere den sterkere Q_2 enn Q_1 og feltet kan ikke nulles ut. På venstre side er avstanden fra den sterkere Q_2 større enn Q_1 og feltene kan nulles ut. Når det er gitt at et av punktene er feltet lik null, må det være i punkt 1.

b) D. All ladning fordeles ut til det ytre av ledersystemet, som altså er på utsida av metallskallet. Metallkula får null ladning.

c) E. $Q = CV = \epsilon_r \epsilon_0 A/d \cdot V$. Spenningen er konstant 100 V og permittiviteten øker, derfor øker Q.

d) A. Høyrehåndsregelen og husk negativ ladning.

e) C. Studert i øving 9.

f) A. $H = IN/\ell = 3,0\,\mathrm{A} \cdot 350/0,15\,\mathrm{m} = 7000\,\mathrm{A/m}$. $M = \chi_m H = 2,3 \cdot 10^{-5} \cdot 7000\,\mathrm{A/m} = 161\,\mathrm{mA/m}$.

g) B. Netto magnetisk fluks gjennom en lukket overflate er alltid lik null.

h) A. Øvre graf viser at bølgelengden $\lambda = 4{,}0$ m. Nedre viser at perioden $T = 1/2s$. Bølgefarten er da $v = \lambda/T = 8{,}0$ m/s.

i) C. Frekvensen er alltid uendra når en bølge passerer fra et medium til et anna. Det er bølgefarten og bølgelengden $\lambda = v/f$ som forandres.

j) C. Gangavstanden $R_2 - r_1$ må være et helt antall hele bølgelengder for konstruktiv interferens.

k) A. Diffraksjonsbildet fra en enkeltspalte er en brei enkelttopp eller en hovedtopp og lavere sidetopper. Derfor er (3) og (5) ikke mulig. Jo smalere spalte, jo breiere diffraksjonsmaksimum, derfor må (1) være fra den bredeste enkeltspalten.

Oppgave 2. Elektrostatikk.

a) **Kule 1:** Inni metallkula har vi $\underline{E_1(r) = 0}$. Ladningen Q fordeler seg jamnt på kulas overflate. Vi velger en kuleformet gaussflate med radius $r > R$ konsentrisk med metallkula. Av symmetrigrunner må det elektriske feltet være konstant i absoluttverdi på heile gaussflata, og dessuten radielt retta utover, dvs. parallelt med flatenormalen $\mathrm{d}\vec{A}$. Gauss' lov for $\vec{E}$ gir da:

$$E_1(r) \cdot 4\pi r^2 = Q/\epsilon_0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{E_1(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R)}\,.$$

Kule 2: I det dielektriske materialet vil elektriske dipoler rettes inn langs feltet som skapes av den frie ladningen Q, dvs. kula poariseres med $\vec{P}_2$ retta utover. Inni kula kan vi da bruke Gauss' lov for den elektriske flukstettheten $\vec{D}$. Med uniform tetthet av fri ladning inne i kula, $\rho_2(r)$, blir netto fri ladning innenfor en kuleformet gaussflate med radius $r < R$ lik

$$q(r) = \rho_2(r) \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \cdot \frac{r^3}{R^3}$$

og Gauss' lov for D gir

$$D_2(r) \cdot 4\pi r^2 = Q \cdot \frac{r^3}{R^3} \qquad \Rightarrow \qquad D_2(r) = \frac{Q}{4\pi}\frac{r}{R^3}$$

Med $\epsilon_r = 2,00$ er det elektriske felt bestemt av

$$\underline{E_2(r) = \frac{D_2(r)}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}} \quad (r \geq R)\,.$$

På utsiden er E-feltet som for kule 1:
$$E_2(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R)\,.$$

b) Maksimal verdi for $E_1(r)$ på kule 1 finner vi på kulas overflate, dvs. $r_1 = R$. Tilhørende feltverdi:
$$E_1(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$
Vi ser at begge uttrykkene for E_2 har sin maksimale verdi ved $r = R$. Feltet "like innenfor" kulas overflate er imidlertid bare halvparten så stort som feltet ' like utenfor" kulas overflate. Dette skyldes at vi har fått indusert en positiv ladning på kulas overflate pga. polariseringen av den dielektriske kula. Tilsvarende har vi en indusert negativ ladning inne i kula som resulterer i at det totale elektriske feltet inne i kula blir mindre enn om den ikke hadde vært dielektrisk "polariserbar". Uansett: Konklusjonen blir at E_2 har sin maksimale verdi på, eller like utenfor, kulas overflate, dvs. $r_2 = R$. Verdien av feltstyrken er her
$$E_2(r_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Skisse av feltstyrkene for de to kulene:

c) Når D og E er funnet er polariseringen enklest uttrykt ved
$$P_2(r) = D_2 - \epsilon_0 E_2 = \frac{Q}{4\pi}\frac{r}{R^3} - \epsilon_0 \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3} = \frac{Q}{8\pi}\frac{r}{R^3}\,.$$
Retningen er den samme som for $\vec{D}$ og $\vec{E}$, dvs. radielt utover. ($\vec{P}$ går fra negative til positive induserte ladninger, og vi har positive induserte ladninger på overflata.) Merk at $P_2(r)$ og $\epsilon_0 E_2$ er like, som må være tilfellet når $\epsilon_\mathrm{r} = 2,00$.

Oppgave 3. Magnetisk induksjon

a) Fra Amperes lov er feltet i avstanden r fra en rett leder gitt som $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ og har asimutal retning. Dette gir for fluksen
$$\Phi_B = \int B\mathrm{d}A = \int_R^{R+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot a\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I\,a}{2\pi}\ln\frac{R+b}{R}\,,\ \text{dvs.} A = \frac{\mu_0 I\,a}{2\pi}.$$

b) Når sløyfa beveger seg parallelt med ledningen er Φ_B den samme hele tiden og $\mathcal{E}_\mathrm{h} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = 0\,.$

c) Når sløyfa beveger seg radielt utover med konstant fart v er $R = R_0 + vt$, der R_0 er verdien for R når $t = 0$. Da er
$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I\,a}{2\pi}\ln\frac{R_0+vt+b}{R_0+vt} = \frac{\mu_0 I\,a}{2\pi}\left(\ln(R_0+vt+b) - \ln(R_0+vt)\right)$$
og
$$\mathcal{E}_\mathrm{R} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0 I\,a}{2\pi}\left(\frac{v}{R_0+vt+b} - \frac{v}{R_0+vt}\right) = \frac{\mu_0 I\,a}{2\pi}\frac{bv}{(R_0+vt+b)(R_0+vt)} = \frac{\mu_0 I\,a}{2\pi}\frac{bv}{R_0^2 + vt(2R_0+b) + (vt)^2}\,.$$

d) I dette tilfellet er det I som varierer og $\mathcal{E}$ blir
$$\mathcal{E}_I = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0\,a}{2\pi}\ln\frac{R+b}{R}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0\,a}{2\pi}\ln\frac{R+b}{R}I_0\cdot\omega\cdot\sin\omega t\,.$$
Amplituden for $\mathcal{E}$ er
$$\mathcal{E}_{I,\max} = \frac{\mu_0\,a}{2\pi}\ln\frac{R+b}{R}I_0\cdot\omega = \frac{\mu_0\cdot 0,050\,\mathrm{m}}{2\pi}\ln\frac{0,050}{0,020}\cdot 10\,\mathrm{A}\cdot 314\,\mathrm{s}^{-1} = 28,8\,\mu\mathrm{V} = \underline{29\,\mu\mathrm{V}}\,.$$

Oppgave 4. Diverse oppgaver

a) E-feltet mellom kuleskallene er gitt ved $E(r) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \dfrac{Q}{r^2}$. Potensiell energi per volumenhet er $u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$. Mellomrommet har da total potensiell energi

$$U = \int_a^b u \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \int_a^b \frac{1}{2}\epsilon_0 \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{Q^2}{r^4} \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \int_a^b \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \underline{\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{b-a}{ab}}.$$

Alternativt kan energien beregnes fra potensialet mellom kuleskallene

$$V_a - V_b = -\int_b^a E(r)\mathrm{d}r = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_b^a \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

og energiuttrykket (i ferdig oppbygd ladning):

$$U = \sum_Q \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}Q(V_a - V_b) = \underline{\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{b-a}{ab}}.$$

b) Biot-Savarts lov (f.eks. fra formelark):

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Superposisjonsprinsippet: Finner B fra henholdsvis lille og store halvsirkel og summerer.

Store halvsirkel b: Deler sløyfa i element $I\mathrm{d}s$. Avstanden r i Biot-Savart er $r = b$ for alle element, og $\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}} = -\mathrm{d}s\,\hat{\mathbf{k}}$ der $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektor opp av papirplanet (h.h.regelen). Dvs. dB fra alle element har retning rett ned i papirplanet. Dette gir:

$$B_b = \left|\int_b \mathrm{d}\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_b \frac{\mathrm{d}s}{b^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\pi b}{b^2} = \frac{\mu_0 I}{4b}$$

Lille halvsirkel a: B-feltet faller i samme retning og vi får ved tilsvarende utregning:

$$B_a = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

For de radielle ledningsbitene er $\mathrm{d}\vec{s}\times\hat{\mathbf{r}} = \vec{0}$, dvs. ingen bidrag. Totalt blir B-feltet retta ned i papirplanet og med størrelse

$$\underline{B = \frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}.$$

Magnetisk moment: For ei plan strømsløyfa uansett form er magnetisk moment lik strøm gange areal:

$$\mu = I \cdot \left(\frac{1}{2}\pi a^2 + \frac{1}{2}\pi b^2\right) = \underline{\frac{I}{2}\pi\left(a^2 + b^2\right)},$$

med retning (etter høyrehåndsregelen): normalt ned i papirplanet.

c) Effekten 5,00 mW fokusert ned til areal på $A = \pi(d/2)^2 = \pi \cdot (3 \cdot 633 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}/2)^2 = 2,83 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}^2$ gir intensitet

$$I = \frac{P}{A} = \frac{5,00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W}}{2,83 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}^2} = \underline{1,77 \cdot 10^9\,\mathrm{W/m}^2 = 1,8\,\mathrm{GW/m}^2}.$$

Intensitet er lik (formelark) $I = \langle S\rangle$ og strålingstrykk p er lik $\langle S\rangle/c$, dermed er strålingstrykket på kula

$$p = \frac{I}{c} = \frac{1,77 \cdot 10^9\,\mathrm{W/m}^2}{3,00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} = 5,88\,\mathrm{N/m}^2 = \underline{5,9\,\mathrm{Pa}}.$$

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 1. juni 07.