Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

EKSAMEN I EMNE TFY4180 FYSIKK

Eksamensdato: Tirsdag 19. mai 2009
Eksamenstid: 09:00 - 13:00

Faglig kontakt under eksamen: Institutt for fysikk, Arne Mikkelsen, tlf. 7359 3433 / 486 05 392
Tillatte hjelpemidler (kode C):

Bestemt enkel godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling (norsk eller tysk utgave)
Vedlagt formelliste

Sensurdato: Innen 11. juni 2009.

Prosenttallene i parantes etter hver oppgave angir hvor mye den i utgangspunktet vektlegges ved bedømmelsen.

I de fleste tilfeller er det fullt mulig å løse etterfølgende punkter selv om et punkt foran skulle være ubesvart.

Noen generelle merknader:

- Symboler er angitt i kursiv (f.eks. V for potensial), mens enheter angis uten kursiv (f.eks. V for volt)
- $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ og $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x-, y- og z-retning.
- Metall er synonymt med elektrisk leder. Isolator er synonymt med dielektrikum.
- Dersom ikke annet er oppgitt
  - antas det at systemet er i elektrostatisk likevekt,
  - er "potensial" underforstått "elektrostatisk potensial" og tilsvarende for "potensiell energi",
  - er nullpunkt for elektrostatisk potensial og potensiell energi valgt uendelig langt borte,
  - er Q, ρ og σ (uten indeks) fri ladning.

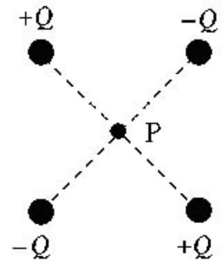
I flervalgsspørsmålene er kun ett av svarene rett. Du skal altså svare A, B, C, D eller E eller du kan svare blankt. **Rett svar gir 5 p, galt svar eller flere svar gir 0 p, blank (ubesvart) gir 1 p.**

Svar på flervalgsspørsmål skriver du på første innleveringsark i en tabell liknende dette:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Svar:												

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål (teller 30%)

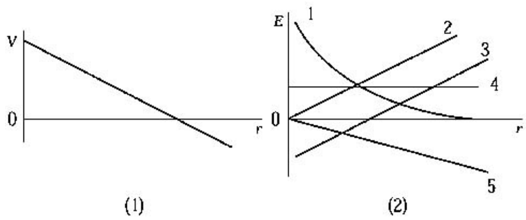
a) Fire ladninger er plassert i hjørnene på et kvadrat som vist i figuren. Det elektriske feltet E og det elektriske potensialet V relativt uendelig i punktet P i sentrum av kvadratet oppfyller



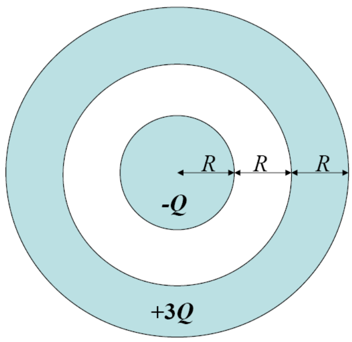
A) $E \neq 0$ og $V > 0$
B) $E = 0$ og $V = 0$
C) $E = 0$ og $V > 0$
D) $E \neq 0$ og $V < 0$
E) Ingen av disse er korrekt

b) Elektrostatisk potensial som funksjon av avstand langs ei gitt linje i rommet er vist i graf (1). Hvilke av kurvene i graf (2) representerer best det elektriske feltet som funksjon av avstanden langs den samme linja?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



c) Ei metallkule med radius R og (negativ) ladning $-Q$ er omgitt av et vakuumsjikt med tykkelse R fulgt av et metallisk kuleskall med tykkelse R og ladning $3Q$. Hvor mye ladning befinner seg på kuleskallets ytre overflate?

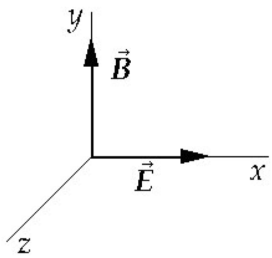


A) 0
B) $-Q$
C) Q
D) $2Q$
E) $3Q$

d) En kondensator på 4,0 μF er ladd til 150 V. Hvor mye tilleggsenergi må du legge til for å lade den til 300 V?

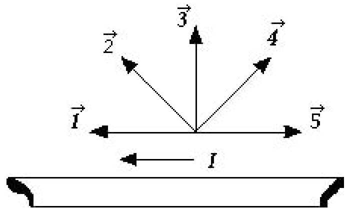
A) 0,60 mJ
B) 0,14 J
C) 18 μJ
D) 0,30 mJ
E) 0,28 J

e) En positiv ladd partikkel beveger seg i et rom med homogene (uniforme) felt $\vec{E}$ og $\vec{B}$, som er rettet i henholdsvis positiv x- og positiv y-retning. Hvis det er null resultantkraft på partikkelen må dens hastighet være i



A) positiv x-retning,
B) negativ x-retning,
C) positiv y-retning,
D) positiv z-retning,
E) negativ z-retning.

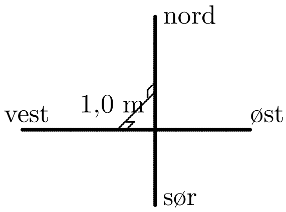
f) En ledning fører en strøm I. De fem vektorene i figuren har alle samme lengde og representerer et B-felt. Det B-feltet som resulterer i maksimal kraft på ledningen er



A) $\vec{1}$
B) $\vec{2}$
C) $\vec{3}$
D) $\vec{4}$
E) $\vec{5}$

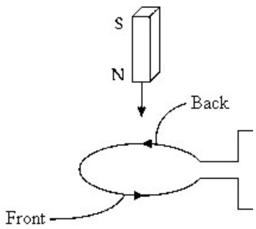
g) To uendelig lange, rette ledere står normalt på hverandre i en avstand 1,0 m på det nærmeste. Den ene lederen står vertikalt (markert sør-nord) med strøm rett opp mot nord og den andre horisontalt med strøm i retning øst. Hva er retningen til netto magnetisk kraft på den horisontale ledningen?

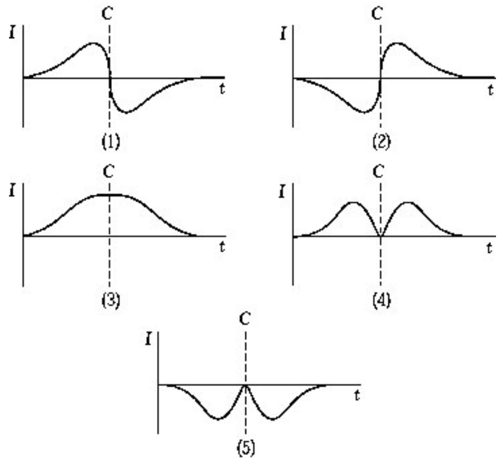
A) nord
B) øst
C) vest
D) sør
E) nettokraft er lik null



h) En stavmagnet slippes gjennom ei strømsløyfe som vist i venstre del av figuren under. Husk at magnetiske feltlinjer går ut fra nordpol og inn mot sørpol på en magnet. Positiv strømretning for den induserte strømsløyfa er vist med piler på sløyfa. Strømmen I som funksjon av tida t når magneten faller gjennom sløyfa er illustrert kvalitativt med hvilken graf? Tidspunktet som midtpunktet av magneten passerer sløyfa er vist med C.

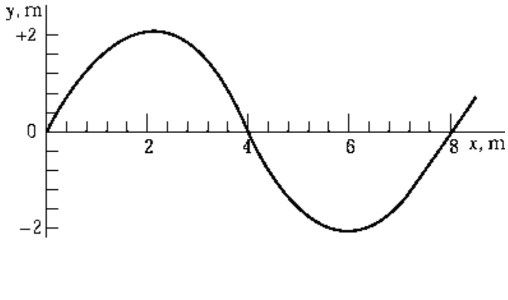
A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5





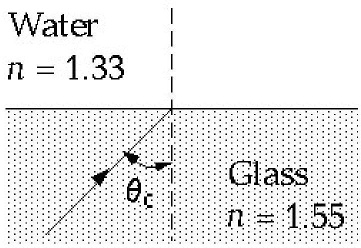
i) Grafen viser ei bølge som vandrer mot høyre med en bølgefart på 4,0 m/s. Uttrykket som best representerer bølga er

A) $y(x,t) = 2\,\mathrm{m}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi x}{4\,\mathrm{m}} - \dfrac{\pi t}{1\,\mathrm{s}}\right)$
B) $y(x,t) = 2\,\mathrm{m}\cdot\sin\left(\dfrac{16\pi x}{1\,\mathrm{m}} - \dfrac{8\pi t}{1\,\mathrm{s}}\right)$
C) $y(x,t) = 2\,\mathrm{m}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi x}{4\,\mathrm{m}} + \dfrac{\pi t}{1\,\mathrm{s}}\right)$
D) $y(x,t) = 4\,\mathrm{m}\cdot\sin\left(\dfrac{\pi x}{4\,\mathrm{m}} - \dfrac{\pi t}{1\,\mathrm{s}}\right)$
E) $y(x,t) = 4\,\mathrm{m}\cdot\sin\left(\dfrac{16\pi x}{1\,\mathrm{m}} - \dfrac{8\pi t}{1\,\mathrm{s}}\right)$



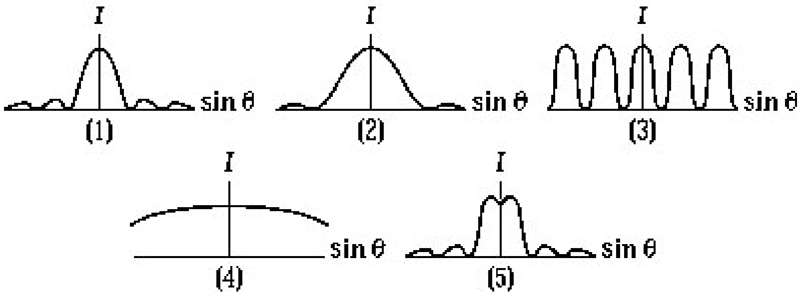
j) En streng er oppstrammet mellom to faste punkter. Bølgefarten i strengen er 335 m/s. Strengen har en resonanssvingning med 528 Hz som den lavest mulige svingefrekvensen. Lengden av strengen er
A) 78,8 cm
B) 63,5 cm
C) 47,6 cm
D) 31,7 cm
E) 15,9 cm

k) En lysstråle i glass treffer ei grenseflate glass-vann. Ved innfallsvinkler større enn θ_c blir lysstrålen totalreflektert. Verdien på θ_c er med to gjeldende sifre



A) 31°
B) 41°
C) 45°
D) 49°
E) 59°

l) Grafene viser den relative intensiteten til diffraksjonsmønstre fra forskjellige spaltesammensetninger som funksjon av $\sin\theta$, der θ er vinkelen mellom aktuell stråle og direktestrålen. Grafen som representerer diffraksjonsmønsteret fra den smaleste enkeltspalten er



A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Oppgave 2. **(teller 15%)**

Ei kule med radius R har totalladning Q homogent (jamt) fordelt i kula. Permittiviteten er ϵ_0 overalt. Det er oppgitt at utenfor ei homogent ladd kule gjelder

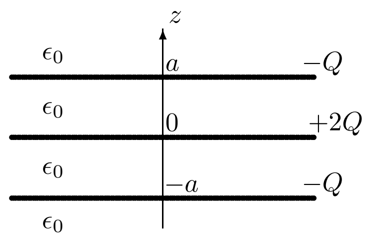
$$E(r) = k\frac{Q}{r^2} \quad \text{og} \quad V(r) = k\frac{Q}{r}, \qquad \text{med} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

a) Finn uttrykk for det elektriske feltet $E(r)$ for $r < R$ og finn deretter forholdet mellom det elektriske feltet E i et punkt i avstand $R/2$ utenfor kuleoverflata (ved $r = 3R/2$) og et punkt $R/2$ innenfor kuleoverflata ($r = R/2$).

b) Finn forholdet mellom det elektriske potensialet V i et punkt i avstand $R/2$ utenfor kuleoverflata og et punkt $R/2$ innenfor kuleoverflata.

Oppgave 3. **(teller 27%)**

a) Tre parallelle og tynne metallplater er plassert normalt på z-aksen i posisjoner $z = -a$, $z = 0$ og $z = a$ som vist i figuren. Platene har areal A og uniform ladning $-Q, +2Q, -Q$. Platene er store i forhold til avstand a, slik at du kan se bort fra endeeffekter. Permittiviteten er ϵ_0.



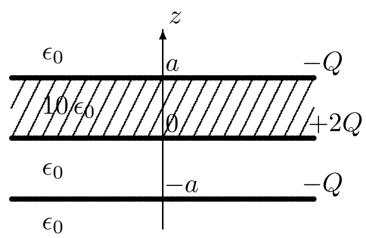
Finn uttrykk for det elektriske feltet $\vec{E}(z) = E(z)\,\hat{\mathbf{k}}$ på z-aksen for alle verdier av z.

OBS: Har du ikke funnet svar i a), kan du bruke $\vec{E} = E_0\,\hat{\mathbf{k}}$ mellom øvre og midtre plan og $\vec{E} = -E_0\,\hat{\mathbf{k}}$ mellom midtre og nedre plan i de følgende oppgavene.

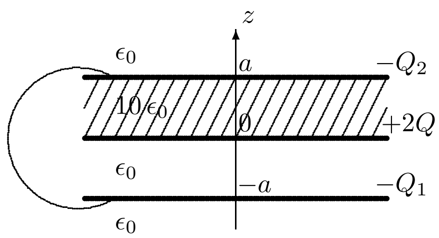
b) Potensialet defineres lik null på den nederste plata, dvs. $V(-a) = 0$. Hva er da potensialene $V(0)$ og $V(a)$ på henholdsvis midtre og øverste plate?

c) Hva er total potensiell energi for de tre ladde platene?

d) Nå fylles volumet mellom midtre og øverste plate med ei dielektrisk skive med relativ permittivitet $\epsilon_r = 10$. Hva blir nå potensialforskjellen $\Delta V = V(a) - V(-a)$ mellom øverste og nederste plate?



e) Øverste og nederste plate i d) forbindes med en tynn elektrisk leder slik at disse to platene oppnår samme elektriske potensial. Bestem resulterende ladning $-Q_1$ og $-Q_2$ på henholdsvis nederste og øverste plate. (Du kan anta at den tynne lederen som forbinder de to platene hele tiden er elektrisk nøytral.)

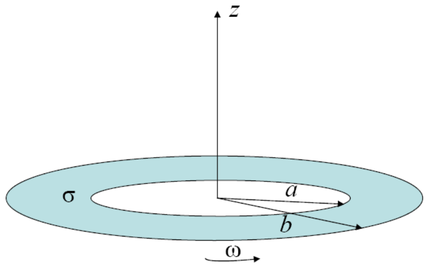


Oppgave 4. (teller 16%)

Ei sirkulær skive med indre radius a og ytre radius b har ladning per flateenhet som varierer med avstanden r fra sentrum:

$$\sigma(r) = \sigma_0 \frac{b^2}{r^2} .$$

Skiva ligger i xy-planet med sentrum i origo. Den roterer omkring symmetriaksen (z-aksen) med vinkelhastighet ω. Skiva er tynn i z-retning.



a) Finn uttrykk for skivas magnetiske dipolmoment $\vec{m}$.
Tips: Finn først dipolmomentet dm til en tynn ring med radius r, tykkelse dr og strøm dI = dq/T, der $T = 2\pi/\omega$ er tida skiva bruker på en omdreining (dvs. perioden).

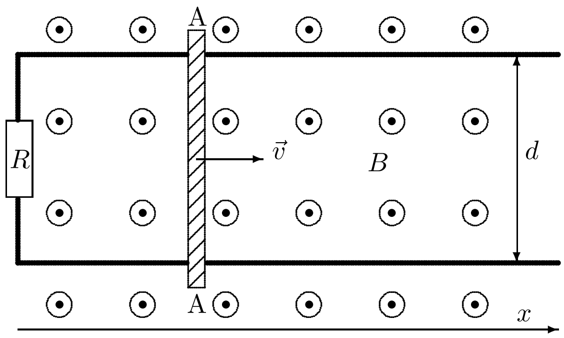
b) Finn uttrykk for magnetfeltet $\vec{B}(z)$ på z-aksen.

Oppgitt: Magnetfelt på symmetriaksen, i avstand z, fra en tynn strømførende ring, med strøm I og radius R:

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} .$$

Oppgave 5. (teller 12%)

Ei metallstang A-A skyves med en hastighet v = 2,00 m/s på to metallstaver som er d = 0,20 m fra hverandre, slik at systemet sammen med motstanden R = 5,0 Ω former ei lukka strømsløyfe. Motstanden i metallstavene er neglisjerbar. Det magnetiske feltet er B = 1,50 T opp av papirplanet og er homogent.



a) Finn indusert elektromotorisk spenning i kretsen.

b) Finn strømretningen for indusert strøm og effekten som dissiperes i motstanden R.

c) Finn den elektromagnetiske krafta som virker på stanga A-A pga. denne bevegelsen, og retningen for krafta.

FORMELLISTE.
Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk som i forelesningsnotatene. Siste side "Størrelse og SI-enhet" inneholder også mange definisjoner.

Fysiske konstanter:

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$ $e = 1,60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

$g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$ $N_\mathrm{A} = 6,02 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ $c_0 = 2,998 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}$

Elektromagnetisme:

(Q, ρ og σ uten indeks viser til *frie* ladninger. Q_i, ρ_i og σ_i er indusert ladning)

Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$

Gauss' lov integralform: $\oiint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q$ $\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon$ $\oiint \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -Q_\mathrm{i}$ $\oiint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$

Gauss' lov differensialform: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon$ $\mathrm{div}\,\vec{P} = -\rho_\mathrm{i}$ $\mathrm{div}\vec{B} = 0$

Fluks: $\Phi_E = \iint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$ $\Phi = \iint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \epsilon\,\Phi_E$ $\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$

Amperes lov: $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \mu\left(I_c + \epsilon\frac{\partial\Phi_E}{\partial t}\right)$ $\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = I_c + \frac{\partial\Phi}{\partial t}$ $\mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Faradays lov: $\mathcal{E} = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t}$ $\mathrm{curl}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Maxwells likninger: $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ $\mathrm{curl}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\mathrm{curl}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Elektrisk dipolmoment: $\vec{p} = q\vec{d}$ (fra − til +) Polarisering: $\vec{P} = \frac{\sum\vec{p}}{V}$

Magnetisk (dipol)moment: $\vec{\mu} = I\vec{A}$ Magnetisering: $\vec{M} = \frac{\sum\vec{\mu}}{V}$

$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_\mathrm{r}\epsilon_0\vec{E}$ $\vec{P} = \chi_\mathrm{e}\epsilon_0\vec{E}$ $\epsilon_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{e}$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu\vec{H} = \mu_\mathrm{r}\mu_0\vec{H}$ $\vec{M} = \chi_\mathrm{m}\vec{H}$ $\mu_\mathrm{r} = 1 + \chi_\mathrm{m}$

Elektrisk potensial: $V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$,

Energi og energitetthet: $U = \frac{1}{2}\iiint V\mathrm{d}q$ Elektrisk: $u = \frac{1}{2}\vec{D}\vec{E}$ Magnetisk: $u_B = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}$

Kondensatorer: $C = \frac{Q}{V}$ Kulekondensator: $C = 4\pi\epsilon_0 R$ Energi: $U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2$

Platekondensator: $C = \epsilon\frac{A}{d}$ Parallellkopling: $C = \sum_i C_i$ Seriekopling: $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

Kraft på strømførende leder: $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{B}$ Lorentzkrafta: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$

Biot-Savarts lov: $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\,\vec{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ $\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

H-felt rundt ∞ lang leder: $H_\theta = \frac{I}{2\pi r}$ H-felt i lang, tynn solenoide: $H = I \cdot n = I \cdot \frac{N}{\ell}$

Ohms lov: $V = RI\,,\quad \sigma\vec{E} = \vec{J}$ Strømtetthet: $\vec{J} = nq\vec{v}_{\rm d}$ der $\vec{v}_{\rm d} = \mu\vec{E}$ = driftsfart.

Spoler: $L = N\dfrac{\Phi_B}{I} \qquad U_B = \dfrac{1}{2}LI^2$

Lenz lov: En indusert strøm er alltid slik at den forsøker å motvirke forandringen i den magnetiske fluks som er årsak til strømmen.

Bølger:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \qquad y(x,t) = f(x \pm vt)$$

Vandrebølge i $\pm x$-retning: $y(x,t) = y_0\sin(kx \mp \omega t)$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad v = \pm\frac{\omega}{k} = \pm\frac{\lambda}{T} = \pm\lambda f\,, \quad \text{med } f = \omega/(2\pi)$$

Standbølge: $y(x,t) = \frac{1}{2}y_0\sin(kx+\omega t) + \frac{1}{2}y_0\sin(kx-\omega t) = y_0\sin(kx)\cos(\omega t)\,, \qquad L = n\cdot\frac{\lambda}{2}\,, \quad f_n = n\cdot\frac{v}{2L}$

Streng: $v = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$ hvor $\mu = \dfrac{\Delta m}{\Delta \ell}$

Elektromagnetiske bølger, f.eks. : $\vec{E}(x,t) = E_0\,\hat{\mathbf{j}}\,\cos(kx \pm \omega t) \qquad \vec{B}(x,t) = B_0\,\hat{\mathbf{k}}\,\cos(kx \pm \omega t)$

$$E_0 = \mp c\cdot B_0 \qquad c = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}}$$

Poyntingvektoren: $\vec{S}(x,t) = \vec{E}(x,t)\times\vec{H}(x,t)$ Med $S = |\vec{S}|$ er videre

Energitetthet (J/m^3) : $u = S/c$ Intensitet (W/m^2) : $I = \langle S\rangle$ Strålingstrykk: $\langle S\rangle/c$

Diffraksjon og interferens: $I = I_0\left[\dfrac{\sin(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2\cdot\left[\dfrac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}\right]^2$ med $\beta = \dfrac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta, \quad \phi = \dfrac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta$

Snells lov: $n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2$ med $n_i = c_0/c_i$

Dekadiske prefikser:

Symbol	Navn	Tallverdi
E	exa	10^{18}
P	peta	10^{15}
T	tera	10^{12}
G	giga	10^{9}
M	mega	10^{6}
K	kilo	10^{3}
h	hekto	10^{2}
da	deka	10^{1}
d	desi	10^{-1}
c	centi	10^{-2}
m	milli	10^{-3}
μ	mikro	10^{-6}
n	nano	10^{-9}
p	piko	10^{-12}
f	femto	10^{-15}
a	atto	10^{-18}

Greske bokstaver:

Navn	Stor	Liten	Transkripsjon
alfa	A	α	a
beta	B	β	b
gamma	Γ	γ	g
delta	Δ	δ	d
epsilon	E	ϵ, ε	e (kort)
zeta	Z	ζ	z
eta	H	η	e (lang), i
theta	Θ	θ, ϑ	th
iota	I	ι	i
kappa	K	κ	k
lambda	Λ	λ	l
my	M	μ	m
ny	N	ν	n
ksi	Ξ	ξ	x, ks
omikron	O	o	o (kort)
pi	Π	π, ϖ	p
rho	P	ρ, ϱ	r
sigma	Σ	σ, ς	s
tau	T	τ	t
ypsilon	Υ	υ	u, y
phi	Φ	ϕ, φ	f
khi	X	χ	ch
psi	Ψ	ψ	ps
omega	Ω	ω	o (lang)

Nablaoperatoren:

Kartesiske koordinater (x, y, z)*, med enhetsvektorer henholdsvis* $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ *og* $\hat{\mathbf{k}}$*:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}V = \vec{\nabla} V &= \hat{\mathbf{i}}\,\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\mathrm{div}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\
\mathrm{curl}\,\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{D} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Sylinderkoordinater (r, ϕ, z)*, med enhetsvektorer henholdsvis* $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\phi}$ *og* $\hat{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{\partial V}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Kulekoordinater (r, θ, ϕ)*, med enhetsvektorer henholdsvis* $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} V &= \hat{\mathbf{r}}\,\frac{\partial V}{\partial r} + \hat{\theta}\,\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{\phi}\,\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(D_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \\
\vec{\nabla}^2 V &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}
\end{aligned}$$

Divergensteoremet og Stokes' teorem for et generelt vektorfelt $\vec{F}$*:*

$$\oiint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\ \mathrm{d}\tau$$

$$\oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

Infinitesimale volumelement:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tau &= \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\
\mathrm{d}\tau &= r^2\ \mathrm{d}r\ \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi \xrightarrow{\text{kulesymmetri}} 4\pi r^2\ \mathrm{d}r \\
\mathrm{d}\tau &= r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}z \xrightarrow{\text{syl.symmetri}} 2\pi r\ \mathrm{d}r\ \ell
\end{aligned}$$

Størrelse		**SI-enhet**	
Navn	**Symbol og def.**	**Symbol**	**Navn**
elektrisk feltstyrke	$\vec{E} = \vec{F}/q$	$\mathrm{V/m = N/C}$	
elektrisk potensial	V	$\mathrm{V = J/C = kg\,m^2 s^{-3} A^{-1}}$	volt
elektrisk flukstetthet	$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$	$\mathrm{C/m^2}$	
elektrisk polarisering	$\vec{P} = \chi_{\mathrm{e}}\epsilon_0\vec{E}$	$\mathrm{C/m^2}$	
elektrisk ladning	Q, q	$\mathrm{C = As}$	coulomb
elektrisk ladningstetthet; rom-	ρ	$\mathrm{C/m^3}$	
flate-	σ	$\mathrm{C/m^2}$	
linje-	λ	$\mathrm{C/m}$	
elektrisk dipolmoment	$\vec{p} = q\vec{d}$	Cm	
fluks til E-feltet	$\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$	$\mathrm{Vm = Nm^2C^{-1}}$	
elektrisk fluks	$\Phi = \iint \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$	C	
permittivitet	ϵ	$\mathrm{F/m}$	
relativ permittivitet	$\epsilon_{\mathrm{r}} = \epsilon/\epsilon_0$	1	
elektrisk suceptibilitet	$\chi_{\mathrm{e}} = \epsilon_{\mathrm{r}} - 1$	1	
elektromotorisk spenning, el.m.kraft (ems)	$\mathcal{E}, \mathcal{U}$	V	
elektrisk strøm	I, i	A	ampere
elektrisk strømtetthet	$\vec{J}, \vec{j}$	$\mathrm{A/m^2}$	
elektrisk potensialdifferanse, spenning	U, V	V	
kapasitans	$C = Q/V$	$\mathrm{F = A\,s\,V^{-1}}$	farad
magnetisk feltstyrke	$\vec{H}$	$\mathrm{A/m}$	
magnetisk fluks	$\Phi_B = \iint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$	$\mathrm{Wb = Vs}$	weber
magnetisk flukstetthet	$\vec{B} = \mu\vec{H}$	$\mathrm{T = Wb/m^2 = N(Am)^{-1} = 10^4\,G}$	tesla; G=gauss
magnetisering	$\vec{M} = \chi_{\mathrm{m}}\vec{H}$	$\mathrm{A/m}$	
permeabilitet	μ	$\mathrm{H/m = Tm/A = VsA^{-1}m^{-1}}$	
relativ permeabilitet	$\mu_{\mathrm{r}} = \mu/\mu_0$	1	
magnetisk suceptibilitet	$\chi_{\mathrm{m}} = \mu_{\mathrm{r}} - 1$	1	
magnetisk (dipol)moment	$\vec{\mu}, \vec{m}$	$\mathrm{A\,m^2}$	
kraftmoment i B-felt	$\vec{\tau} = \vec{T} = \vec{\mu}\times\vec{B}$	$\mathrm{A\,T\,m^2 = Nm}$	
intensitet	I	$\mathrm{W/m^2}$	
induktans	L	$\mathrm{H = VsA^{-1}}$	henry
resistans	R	$\Omega = \mathrm{VA^{-1}}$	ohm
resistivitet	ρ	$\Omega\mathrm{m}$	
konduktivitet	$\sigma = 1/\rho$	$(\Omega\,\mathrm{m})^{-1}$	
impedans	Z	Ω	
magnetomotorisk spenning (mmf)	$\mathcal{F}_{\mathrm{m}}$	A	
reluktans	$\Re$	$\mathrm{H^{-1}}$	
poyntingvektoren	$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$	$\mathrm{W/m^2}$	
masse	m	kg	kilogram
hastighet	v	$\mathrm{m/s}$	
kraft	$\vec{F}$	$\mathrm{N = kg\,m\,s^{-2}}$	newton
trykk	p	$\mathrm{Pa = N\,m^{-2}}$	pascal
arbeid, energi	E, W	$\mathrm{J = Nm}$	joule
effekt	P	$\mathrm{W = J/s}$	watt
vinkel	$\alpha, \theta, \gamma, \ldots$	rad	radian
vinkelfrekvens	ω	rad/s	
romvinkel	Ω	sr	steradian
lengde	l	m	meter
areal	A	$\mathrm{m^2}$	
volum	V	$\mathrm{m^3}$	
tid	t	s	sekund
frekvens	f	$\mathrm{Hz = 1/s}$	hertz
bølgelengde	λ	m	
bølgetall	$k = 2\pi/\lambda$	$\mathrm{1/m}$	