Institutt for fysikk 2009

TFY4180 Fysikk (for Energi & miljø)
Eksamen 19. mai 2009 Løsningsforslag.

Oppgave 1. Flervalgsspørsmål

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Rett svar:	B	D	D	B	D	C	E	A	A	D	E	D

Detaljer om noen av spørsmålene:

a) B.

b) D. $E = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}r = +\text{konstant}$

c) D. Gauss' lov med gaussflate inne i det metalliske kuleskallet gir at en ladning Q må ligge på indre overflate. Dermed blir det igjen $2Q$ på ytre overflate.

d) B. Energi i kondensator $= \frac{1}{2}CV^2$, slik at svaret blir $\frac{1}{2}4,0 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} \cdot \left(300^2 - 150^2\right)\,\mathrm{V}^2 = 0,135\,\mathrm{J}$.

e) D. Resultantkraft = Lorentzkrafta $= \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Skal denne være null må $\vec{v} \times \vec{B}$ ha retning motsatt $\vec{E}$, dvs. i negativ x-retning. Da må $\vec{v}$ ha retning i positiv z-retning, etter høyrehåndsregelen.

f) C. $\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$ er størst når $\vec{\ell}$ og $\vec{B}$ er normale på hverandre.

g) E. Retningen på magnetfeltet rundt den vertikale lederen er asimutalt i et horisontalt plan. Krafta på den horisontale lederen er null i det nærmeste punktet, og for alle andre punkter vil krafta på to punkter like langt fra dette midtpunktet kansellere med like stor i hver retning. Det vil derimot være et netto dreiemoment på lederen.

h) A. Når magneten nærmer seg strømsløyfa øker magnetfluksen nedover inni sløyfa. Ifølge Lenz' lov settes opp en strøm som motvirker økningen, og ifølge høyrehåndsregelen må strømmen gå i positiv retning gitt i figuren. Når magneten er midt i øker ikke fluksen lenger, for deretter å avta. Da blir strømretningen motsatt. Altså figur 1 rett.

i) A. Fra grafen leses bølgelengde $\lambda = 8$ m og dermed frekvensen $T = \lambda/v = 2\ \mathrm{s}^{-1}$. Amplituden er 2 m. Bølgen $y(x,t) = y_0 \cdot \sin(2\pi x/\lambda - 2\pi t/T)$ er da representert med A).

j) D. $v = \lambda f$. Ved laveste resonans (grunntonen) er strenglengden lik halve bølgelengden: $\ell = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f} = \frac{335\,\mathrm{m/s}}{2 \cdot 528\,\mathrm{s}^{-1}} = 0,317\,\mathrm{m}$.

k) E. Fra Snells brytningslov: Totalrefleksjon når utfallsvinkel lik 90°: $n_g \cdot \sin\theta_\mathrm{c} = n_v \sin 90°$. Dette gir $\theta_\mathrm{c} = \arcsin\left(n_v \cdot 1,0/n_g\right) = \arcsin\left(1,33/1,55\right) = \arcsin 0,858 = 59,1°$.

l) D. Diffraksjonsbildet fra en enkeltspalte er en brei enkelttopp eller en hovedtopp og lavere sidetopper. Derfor er (3) og (5) ikke mulig. Jo smalere spalte, jo breiere diffraksjonsmaksimum, derfor må (4) være fra den smaleste enkeltspalten.

Oppgave 2.

a) Inni kula er romladningstettheten $\rho = \dfrac{Q}{4/3 \cdot \pi R^3}$. Bruk av Gauss lov $\oint \epsilon_0 E(r) \cdot \mathrm{d}A = \iiint \rho \mathrm{d}V$ på Gausskule med radius r inni kula gir

$$\epsilon_0 E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{4/3 \cdot \pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad \underline{E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3} = k\frac{Q}{R^3} \cdot r \quad \left(= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot r\right)}.$$

Utenfor kuleflata er oppgitt $E(r) = k\dfrac{Q}{r^2}$ som $R/2$ utenfor kuleoverflata gir

$$E(R + R/2) = k\frac{Q}{(3R/2)^2} = k\frac{Q}{R^2} \cdot \frac{4}{9}.$$

$R/2$ inni kula er

$$E(R/2) = k\frac{Q}{R^3} \cdot \frac{R}{2} = k\frac{Q}{R^2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Dermed er

$$\underline{\frac{E(3R/2)}{E(R/2)} = \frac{8}{9}}.$$

c) Fra oppgitt formel $V(r) = k\frac{Q}{r}$ utenfor kula, får vi:

$$\begin{aligned} R/2 \text{ utenfor kula} \quad V(R+R/2) &= k\frac{Q}{(3R/2)} = k\frac{Q}{R}\cdot\frac{2}{3} \\ \text{på kuleoverflata} \quad V(R) &= k\frac{Q}{R} \end{aligned}$$

Potensialet $V(r)$ inni kula finnes ved integrasjon av $E(r)$:

$$V(r) - V(R) = -\int_R^r k\frac{Q}{R^3}\cdot r\mathrm{d}r = k\frac{Q}{R^3}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_R^r = k\frac{Q}{2R^3}\left[R^2 - r^2\right]$$

slik at

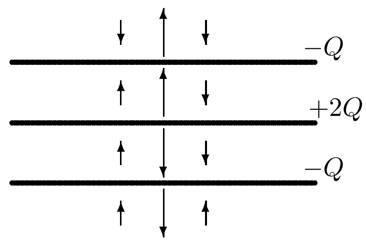
$$V(R/2) = V(R) + k\frac{Q}{2R^3}\left[R^2 - (R/2)^2\right] = k\frac{Q}{R} + k\frac{Q}{2R}\frac{3}{4} = k\frac{Q}{R}\frac{11}{8}$$

og endelig

$$\underline{\frac{V(3R/2)}{V(R/2)} = \frac{2/3}{11/8} = \frac{16}{33}}\,.$$

Oppgave 3.

a) Feltet ut fra et stort plan er $E = \sigma/(2\epsilon_0)$ i begge retninger. Disse feltene for henholdsvis øverste, midterste og nederste plate representert med vektorer i figuren til høyre. Legger vi sammen E fra de tre planene, finner vi at det totale feltet er



$$E(z) = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0 A} & \text{for} \quad z \in [0, a\rangle \\ -\frac{Q}{\epsilon_0 A} & \text{for} \quad z \in \langle -a, 0] \\ 0 & \text{for} \quad z \notin [-a, a] \end{cases}\,.$$

Vi kan også bruke Gauss' lov på en sylinder med ulik høyde for å vise dette.

b) Potensialet øker med $E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}a$ fra nederste til midtre plate, for så å avta med samme beløp fra midtre til øverste plate. Følgelig er

$$\underline{V(0) = \frac{Qa}{\epsilon_0 A} \quad \text{og} \quad V(a) = 0\,.}$$

c) Vi har uniform energitetthet lik

$$u = \epsilon_0\frac{1}{2}E^2 = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A^2}$$

i hele volumet mellom nederste og øverste plate. Total energi blir dermed

$$U = u\cdot(\text{volum}) = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A^2}\cdot(2a\,A) = \underline{\frac{Q^2 a}{\epsilon_0 A}}\,.$$

Eller beregnet fra formelen $U = \frac{1}{2}\sum qV$ over de tre platene:

$$U = \frac{1}{2}\sum qV = \frac{1}{2}(-Q)\cdot 0 + \frac{1}{2}(2Q)\frac{Qa}{\epsilon_0 A} + \frac{1}{2}(-Q)\cdot 0 = \underline{\frac{Q^2 a}{\epsilon_0 A}}\,.$$

d) Med samme ladning på platene og permittiviteten økt med faktor 10, er den elektriske feltstyrken redusert med en faktor 10 i volumet mellom midtre og øverste plate, sammenlignet med før vi satte inn den dielektriske skiva. Følgelig avtar potensialet bare med $E = \frac{Qa}{10\epsilon_0 A}$ når vi går fra midtre til øverste plate. Potensialforskjellen mellom midtre og nederste plate er uendret, slik at den totale potensialforskjellen mellom øverste og nederste plate blir

$$\Delta V = [V(a) - V(0)] + [V(0) - V(-a)] = -\frac{Qa}{10\epsilon_0 A} + \frac{Qa}{\epsilon_0 A} = \underline{\frac{9Qa}{10\epsilon_0 A}}\,.$$

Alternativt kunne man bruke som foreslått $\vec{E} = E_0\,\hat{\mathbf{k}}$. Fra svarene over blir da $E_0 = \dfrac{Q}{\epsilon_0 A}$ og svarene blir:

b) $V(0) = E_0 a$.
c) $U = QE_0 a = \epsilon_0 aAE_0^2$.
d) $\Delta V = \frac{9}{10}E_0 a$.

e) Med elektrisk kontakt mellom øverste og nederste plate må, som oppgitt, potensialet være den samme på platene. Dette innebærer at vi må ha samme elektriske feltstyrke i øvre halvdel (der vi har dielektrikum) som i nedre halvdel (der vi har luft/vakuum), men med motsatt retning. Dette oppnås ved at ladning strømmer mellom øvre og nedre plate. Med indeks 1 for nedre og 2 for øvre halvdel av rommene og bare regnet med absoluttverdier, får vi

$$E_2 = E_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{D_2}{10\epsilon_0} = \frac{D_1}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_2/A}{10\epsilon_0} = \frac{Q_1/A}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad Q_2 = 10Q_1\,.$$

Dessuten må vi selvsagt ha $Q_1 + Q_2 = 2Q$. Løser vi disse to ligningene med hensyn på de to ukjente ladningene, finner vi

$$\underline{Q_1 = \frac{2}{11}Q \quad \text{og} \quad Q_2 = \frac{20}{11}Q\,.}$$

Som angitt i oppgaveteksten er ladningen negativ på hver plate, $-Q_1$ på nederste og $-Q_2$ på øverste.

Oppgave 4.

a) I en tynn ring med radius r og tykkelse $\mathrm{d}r$ går det en strøm $\mathrm{d}I = \mathrm{d}q/T$, der $\mathrm{d}q$ er ladningen som passerer et visst punkt på ringen i en viss tid T. Et fornuftig valg er $T = 2\pi/\omega$ lik tida skiva bruker på en omdreining (dvs. perioden) og $\mathrm{d}q = \sigma(r) \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}r$ lik ladningen på hele den tynne ringen. En slik tynn strømring har da strøm

$$\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}q}{T} = \frac{\sigma(r) \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}r}{2\pi/\omega} = \sigma_0 \omega b^2 \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

og omslutter et areal πr^2, slik at dens magnetiske dipolmoment er

$$\mathrm{d}m = \mathrm{d}I \cdot \pi r^2 = \sigma_0 \omega b^2 \pi r \mathrm{d}r\,.$$

Skivas totale magnetiske dipolmoment finner vi ved å integrere dette, fra $r = a$ til $r = b$:

$$m = \int_a^b \mathrm{d}m = \int_a^b \sigma_0 \omega b^2 \pi r \mathrm{d}r = \underline{\frac{1}{2}\sigma_0 \omega b^2 \pi (b^2 - a^2)\,.}$$

Retningen er normal på strømsløyfa etter høyrehåndsregelen, dvs. $\vec{m} = m\,\hat{\mathbf{k}}$ (langs positiv z-akse hvis $\sigma_0 > 0$).

[Her har mange bommet ved å bruke $\mathrm{d}m = \mathrm{d}I\ \mathrm{d}A$, eller også $\mathrm{d}m = I\ \mathrm{d}A$; med $\mathrm{d}A = 2\pi r \mathrm{d}r$ og $I = \int_a^b \mathrm{d}I$, som er feil. Arealet som inngår i definisjonen av magnetisk dipolmoment er klart arealet **innenfor strømsløyfa**, ikke arealet av selve strømsløyfa.]

b) Vi kan bruke det oppgitte uttrykket for B til å skrive ned magnetfeltet $\mathrm{d}B$ fra en tynn ring med radius r, tykkelse $\mathrm{d}r$ og strøm $\mathrm{d}I$:

$$\mathrm{d}B = \mu_0 \frac{\mathrm{d}I\, r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}}\,.$$

Innsetting av $\mathrm{d}I = \sigma_0 \omega b^2 \frac{\mathrm{d}r}{r}$ ovenfra og integrasjon over skiva gir

$$B(z) = \frac{\mu_0 \sigma_0 \omega b^2}{2} \int_a^b \frac{r \mathrm{d}r}{(z^2 + r^2)^{3/2}}\,.$$

Dette er et enkelt integral, og vi får

$$\int_a^b \frac{r \mathrm{d}r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \left(z^2 + a^2\right)^{-1/2} - \left(z^2 + b^2\right)^{-1/2}\,.$$

Altså

$$\underline{B(z) = \frac{\mu_0 \sigma_0 \omega b^2}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}}\right].}$$

Etter høyrehåndsregelen er retningen $\vec{B}(z) = B(z)\,\hat{\mathbf{k}}$ (langs positiv z-akse hvis $\sigma_0 > 0$).

Oppgave 5.

a) Magnetisk fluks innenfor den lukkede strømsløyfa er

$$\Phi_B = B \cdot A(t) = B \cdot d \cdot (x_0 + vt).$$

Ems'en er gitt ved Faradays lov:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -B \cdot d \cdot v = -1,50\,\mathrm{T} \cdot 0,20\,\mathrm{m} \cdot 2,00\,\mathrm{m/s} = -\underline{0,60\,\mathrm{V}}\,.$$

(Evt. enhetsanalyse: $\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}}\mathrm{m}^2/\mathrm{s} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{As}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \mathrm{V}$.)

b) Strømretning etter Lenz lov er <u>med klokka</u>, slik at strøm i kretsen skaper et B-felt nedover inni sløyfa som motvirker økningen av Φ_B pga. stavbevegelsen. Med neglisjerbar motstand i metallstavene og ledninger faller hele ems'en over motstanden: $V = \mathcal{E}$, og effekten i motstanden er:

$$P = VI = \frac{V^2}{R} = \frac{(0,60\,\mathrm{V})^2}{5,00\,\Omega} = \underline{72\,\mathrm{mW}}\,.$$

c) Krafta kan enklest beregnes fra effekten funnet i b). Uten annet tap i kretsen er effekten lik den mekaniske effekten vi må trekke med: $P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{F\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Fv$, der $\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x$ er arbeid pga. en forflytning $\mathrm{d}x$ og stavhastigheten er $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Dette gir krafta

$$F = \frac{P}{v} = \frac{0,0720\,\mathrm{Nm/s}}{2,00\,\mathrm{m/s}} = \underline{0,036\,\mathrm{N}}\,.$$

Alternativt kan vi beregne krafta på staven A-A fra

$$\vec{F} = \int_{AA} I\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{B}.$$

Nå er $I\mathrm{d}\vec{s} \perp \vec{B}$ og med strømretning nedover (med klokka) får $\vec{F}$ etter h.h.regelen <u>retning mot venstre</u>. B er konstant over integrasjonevegen som har lengde d, slik at vi får

$$F = IdB = \frac{\mathcal{E}}{R}dB = \frac{0,60\,\mathrm{V}}{5,00\,\Omega} \cdot 0,20\,\mathrm{m} \cdot 1,50\,\mathrm{T} = \underline{0,036\,\mathrm{N}}\,.$$

Retning: Dette er den elektromagnetiske krafta som virker på staven på grunn av den induserte strømmen i sløyfa og virker altså mot venstre, i negativ x-retning. Om staven skal ha jamn hastighet (summen av kreftene lik null, ifølge Newtons 2. lov) må vi skyve med motsatt like stor kraft. Dvs. at krafta vi skyver med er retta i positiv x-retning, i fartsretningen naturlig nok.

$\mathcal{A}.\mathcal{M}$i. 2. juni 09.