NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen: Ingjald Øverbø, tlf 73 59 18 67, eller 97012355

EKSAMEN I
TFY4250 ATOM- OG MOLEKYLFYSIKK og
FY2045 Kvantefysikk

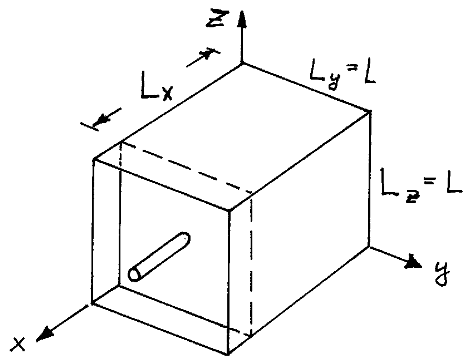
Tirsdag 13. desember 2005
kl. 09.00 - 13.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling
Øgrim & Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller
Lian og Angell: Fysiske størrelser og enheter

The questions are given in English, and then in Norwegian, page 1 – 7
A sheet with expressions and formulae is attached (page 8)
Sensuren faller i januar 2006.

ENGLISH TEXT

Question 1



The figure shows a box with dimensions L_x and $L_y = L_z = L$, which contains a particle with mass m. One of the walls of the box is a piston that can move, so that L_x can vary. The potential is equal to zero inside the box and infinite outside. The energy eigenfunctions of the box can be written on the form

$$\psi_{n_x,n_y,n_z} = A \sin\frac{n_x \pi x}{L_x} \sin\frac{n_y \pi y}{L} \sin\frac{n_z \pi z}{L}.$$

If the piston moves slowly, a particle in the state ψ_{n_x,n_y,n_z} will keep its quantum numbers, while the wave function changes form, because L_x changes.

a. Find the energy eigenvalue of the state ψ_{n_x,n_y,n_z}, expressed in terms of the quantum numbers n_x, n_y and n_z.

Assume that the particle is in the ground state, and show that the force on the piston from the particle is

$$F_x = \frac{\hbar^2\pi^2}{mL_x^3}.$$

[Hint: If the piston moves an infinitesimal distance dL_x, the particle will do an amount of work on the piston, at the expense of the particle energy.]

b. Suppose now that the box contains 8 non-interacting spin-$\frac{1}{2}$ particles with mass m, and that this many-particle system is in the ground state of this system, that is, has the lowest possible total energy. What is then the force from the 8 particles on the piston when $L_x = L$?

Question 2

A particle with mass m is moving in a one-dimensional potential $V(x)$, and is in a state described by the normalised wave function

$$\Psi_b(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left[x^2 + \tfrac{1}{2}b^2(1+e^{-2i\omega t}) + \frac{i\hbar t}{m} - 2bx\,e^{-i\omega t}\right]\right\},$$

where b is an arbitrary real parameter with dimension length.

a. Show that

$$i\hbar\,\frac{\partial\Psi_b}{\partial t} = \Psi_b\cdot\left[m\omega^2 bx\,e^{-i\omega t} - \tfrac{1}{2}m\omega^2 b^2\,e^{-2i\omega t} + \tfrac{1}{2}\hbar\omega\right].$$

Then calculate $\partial\Psi_b/\partial x$, and show that

$$\hat{K}\Psi_b = \Psi_b\cdot\left[-\tfrac{1}{2}m\omega^2(x - b\,e^{-i\omega t})^2 + \tfrac{1}{2}\hbar\omega\right],$$

where $\hat{K}$ is the operator corresponding to the kinetic energy.

b. Use these results, together with the time-dependent Schrödinger equation, to determine the potential $V(x)$.

For a special value of b, the wave function $\Psi_b(x,t)$ descibes a stationary state, namely the ground state of the potential $V(x)$. Show this, and state what the special value of b is.

Show that the probability density (as a function of x) has a Gaussian form also for all other values of b, and state what the "average position" $\langle\, x\,\rangle_t$ is as a function of time.

c. From the formula for $|\Psi_b(x,t)|^2$, you will probably realise that the uncertainty $(\Delta x)_t$ is independent of both t and b, and consequently is the same as for the ground state. A simple way to calculate expectation values and uncertainties, for the special type of wave function $\Psi_b(x,t)$, is as follows:

Show first that $\Psi_b(x,t)$ is an eigenfunction of the operator

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x + \frac{i\hat{p}_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

with the eigenvalue

$$be^{-i\omega t}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \equiv \alpha.$$

Then use the formulae

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger) \qquad \text{and} \qquad \hat{p}_x = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a - a^\dagger)$$

to calculate the expectation values $\langle\, x \,\rangle_t$ and $\langle\, p_x \,\rangle_t$. [Hint: $\int \psi_1^* a^\dagger \psi_2 d\tau = \int (a\,\psi_1)^* \psi_2 d\tau$.] Check the result for $\langle\, p_x \,\rangle_t$ using Ehrenfest's theorem.

d. Show by similar calculations that the uncertainties Δx and Δp_x for the state $\Psi_b(x,t)$ are time independent, and find $\Delta x \cdot \Delta p_x$. [Hint: You will need the commutator relation $aa^\dagger - a^\dagger a = 1$.]

Question 3

In this Problem, we consider a system of two spin-$\frac{1}{2}$ particles. We denote the spins of particle 1 and particle 2 by $\mathbf{S}_1$ and $\mathbf{S}_2$, respectively. If both of the components S_{1z} and S_{2z} of the spins $\mathbf{S}_1$ and $\mathbf{S}_2$ are measured separately, this spin system will be left in one of the following four states:

$$\chi_+(1)\chi_+(2), \quad \chi_+(1)\chi_-(2), \quad \chi_-(1)\chi_+(2) \qquad \text{and} \qquad \chi_-(1)\chi_-(2),$$

defined by

$$S_{iz}\chi_\pm(i) = \pm\tfrac{1}{2}\hbar\,\chi_\pm(i), \qquad i = 1, 2.$$

a. Another possibility is to measure the two observables $\mathbf{S}^2$ and S_z, where $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ is the sum of the two spins. State what the possible measured values are.

After such a measurement of $\mathbf{S}^2$ and S_z, one of the possible states of this spin system is given by the normalised state

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_-(1)\chi_+(2)\right].$$

Show that this is an eigenstate of $\mathbf{S}^2$ and S_z, and determine the eigenvalues. [Hint: See the formula sheet.]

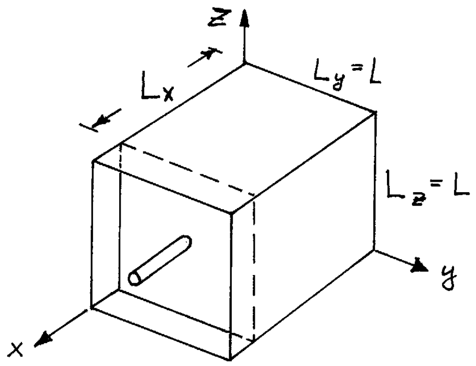
b. Suppose that the system is prepared in the state χ given above, by a measurement of $\mathbf{S}^2$ and S_z, and suppose that S_{1z} then is measured. What is the probability to measure $S_{1z} = \frac{1}{2}\hbar$, and in which state will the system be left after a measurement with this result?

What is the result if one measures S_{2z} at the same time as one measures $S_{1z} = \frac{1}{2}\hbar$?

What is the expectation value $\langle\, S_{1z}\, \rangle$ and what is the uncertainty ΔS_{1z} for the state χ?

NORSK TEKST

Oppgave 1



Figuren viser en boks med sidekanter L_x og $L_y = L_z = L$, som inneholder en partikkel med masse m. Den ene veggen i boksen utgjøres av et bevegelig stempel, slik at L_x kan varieres. Potensialet er lik null inne i boksen og uendelig utenfor. Energiegenfunksjonene i boksen kan skrives på formen

$$\psi_{n_x,n_y,n_z} = A \sin \frac{n_x \pi x}{L_x} \sin \frac{n_y \pi y}{L} \sin \frac{n_z \pi z}{L}.$$

Dersom stempelet beveger seg langsomt, vil en partikkel som befinner seg i en tilstand ψ_{n_x,n_y,n_z} fortsette å ha de samme kvantetallene, mens selve bølgefunksjonen endrer form i henhold til formelen ovenfor, fordi L_x endrer seg.

a. Finn energiegenverdien for tilstanden ψ_{n_x,n_y,n_z}, uttrykt ved bl.a kvantetallene n_x, n_y og n_z.

Anta at partikkelen befinner seg i grunntilstanden, og vis at kraften på stempelet fra partikkelen er

$$F_x = \frac{\hbar^2 \pi^2}{m L_x^3}.$$

[Hint: Ved en infinitesimal bevegelse dL_x av stempelet utfører kraften et arbeid på stempelet som går på bekostning av energien til partikkelen.]

b. Anta nå at boksen inneholder 8 ikke-vekselvirkende spinn-$\frac{1}{2}$-partikler med masse m, og at dette mangepartikkelsystemet befinner seg i grunntilstanden for dette systemet, dvs har så lav total energi som mulig. Hva er kraften fra de 8 partiklene på stempelet når $L_x = L$?

Oppgave 2

En partikkel med masse m beveger seg i et éndimensjonalt potensial $V(x)$, og befinner seg i en tilstand beskrevet ved den normerte bølgefunksjonen

$$\Psi_b(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}\left[x^2 + \tfrac{1}{2}b^2(1+e^{-2i\omega t}) + \frac{i\hbar t}{m} - 2bx\,e^{-i\omega t}\right]\right\},$$

der b er en vilkårlig reell parameter med dimensjon lengde.

a. Vis at

$$i\hbar\,\frac{\partial\Psi_b}{\partial t} = \Psi_b\cdot\left[m\omega^2 bx\,e^{-i\omega t} - \tfrac{1}{2}m\omega^2 b^2\,e^{-2i\omega t} + \tfrac{1}{2}\hbar\omega\right].$$

Regn videre ut $\partial\Psi_b/\partial x$, og vis at

$$\hat{K}\Psi_b = \Psi_b\cdot\left[-\tfrac{1}{2}m\omega^2(x - b\,e^{-i\omega t})^2 + \tfrac{1}{2}\hbar\omega\right],$$

der $\hat{K}$ er operatoren for kinetisk energi.

b. Bruk disse resultatene, sammen med den tidsavhengige Schrödingerligningen, til å bestemme potensialet $V(x)$.

For en viss verdi av b beskriver den oppgitte bølgefunksjonen en stasjonær tilstand, nemlig grunntilstanden for potensialet $V(x)$. Påvis dette, og angi den nevnte b-verdien.

Vis at sannsynlighetstettheten (som funksjon av x) har Gauss-form også for andre verdier av b enn den nevnte spesialverdien, og angi "tyngdepunktet" $\langle\, x\,\rangle_t$ av sannsynlighetsfordelingen som funksjon av tiden.

c. Fra formelen for $|\Psi_b(x,t)|^2$ innser du kanskje at usikkerheten $(\Delta x)_t$ er uavhengig både av t og b, og følgelig er den samme som for grunntilstanden. En enkel måte å beregne forventningsverdier og usikkerheter på, for denne spesielle typen bølgefunksjon $\Psi_b(x,t)$, er som følger:

Vis først at $\Psi_b(x,t)$ er en egenfunksjon til operatoren

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x + \frac{i\hat{p}_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

med egenverdien

$$be^{-i\omega t}\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \equiv \alpha.$$

Bruk så formlene

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger) \qquad \text{og} \qquad \hat{p}_x = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a - a^\dagger)$$

til å beregne forventningsverdiene $\langle\, x\,\rangle_t$ og $\langle\, p_x\,\rangle_t$. [Hint: $\int \psi_1^* a^\dagger \psi_2 d\tau = \int (a\,\psi_1)^* \psi_2 d\tau$.] Kontrollér resultatet for $\langle\, p_x\,\rangle_t$ vha Ehrenfests teorem.

d. Vis ved tilsvarende beregninger at usikkerhetene Δx og Δp_x for tilstanden $\Psi_b(x,t)$ er tidsuavhengige, og finn $\Delta x \cdot \Delta p_x$. [Hint: Du får bruk for kommutator-relasjonen $aa^\dagger - a^\dagger a = 1$.]

Oppgave 3

I denne oppgaven betraktes et system som består av to spinn-$\frac{1}{2}$-partikler. Spinnene til partikkel 1 og partikkel 2 kan vi kalle henholdsvis $\mathbf{S}_1$ og $\mathbf{S}_2$. Hvis begge komponentene S_{1z} og S_{2z} måles separat, vil dette spinnsystemet etterlates i én av de fire tilstandene

$$\chi_+(1)\chi_+(2), \quad \chi_+(1)\chi_-(2), \quad \chi_-(1)\chi_+(2) \quad \text{og} \quad \chi_-(1)\chi_-(2),$$

definert ved at

$$S_{iz}\chi_\pm(i) = \pm\tfrac{1}{2}\hbar\,\chi_\pm(i), \qquad i = 1, 2.$$

a. En annen mulighet er å måle de to observablene $\mathbf{S}^2$ og S_z, der $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ er summen av de to spinnene. Angi de mulige måleverdiene.

Etter en slik måling av $\mathbf{S}^2$ og S_z er én av de mulige tilstandene for dette spinnsystemet gitt ved den normerte tilstanden

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_-(1)\chi_+(2)\right].$$

Vis at denne er en egentilstand til $\mathbf{S}^2$ og S_z, og bestem egenverdiene. [Hint: Se hjelpeformlene på formelarket.]

b. Anta at systemet er preparert i tilstanden χ gitt ovenfor, ved en måling av $\mathbf{S}^2$ og S_z, og at en så måler S_{1z}. Hva er da sannsynligheten for å måle $S_{1z} = \frac{1}{2}\hbar$, og hvilken tilstand havner systemet i etter en måling med dette resultatet?

Hva blir resultatet dersom en måler S_{2z} samtidig med at en måler $S_{1z} = \frac{1}{2}\hbar$?

Hva er forventningsverdien $\langle\, S_{1z}\,\rangle$ og usikkerheten ΔS_{1z} i tilstanden χ?

Attachment: Formulae and expressions

Some of the formulae below may turn out to be useful.

Harmonic oscillator

The energy eigenfunctions for the potential $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (-\infty < x < \infty)$ satisfy the eigenvalue equation

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2 - (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega\right]\psi_n(x) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, ...,$$

with solutions on the form

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\, e^{-m\omega x^2/2\hbar} H_n(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{\hbar/m\omega}}\ ;$$

$$H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, \quad \cdots.$$

Ehrenfest's teorem

$$\frac{d}{dt}\langle\, \mathbf{r} \,\rangle = \frac{1}{m}\langle\, \mathbf{p} \,\rangle\ ; \qquad \frac{d}{dt}\langle\, \mathbf{p} \,\rangle = \langle\, -\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \,\rangle\,.$$

Angular momentum

$$\hat{\mathbf{J}}^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)\,|j,m\rangle, \qquad \hat{J}_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle;$$

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y\,, \qquad \hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_z^2 + \hbar\hat{J}_z + \hat{J}_-\hat{J}_+\,, \qquad \hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z + \hat{J}_+\hat{J}_-\,;$$

$$\hat{J}_\pm\,|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j + 1 \pm m)}\ |j, m \pm 1\rangle\,.$$

Some formulae

$$e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta;$$

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = 1 - 2\sin^2\beta;$$

$$|e^z| = e^{\Re\mathrm{e}(z)}\,.$$