

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
 Institutt for fysikk

EKSAMEN I
FY2045 KVANTEMEKANIKK I/
TFY4250 KVANTEMEKANIKK I

Tirsdag 10. august 2010

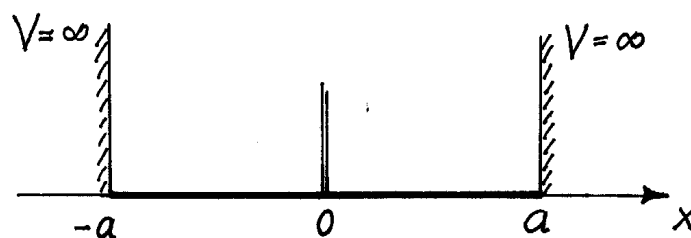
kl. 09.00 - 13.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
 Rottmann: Matematisk formelsamling
 Øgrim & Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller
 Lian og Angell: Fysiske størrelser og enheter

Et ark med uttrykk og formler er vedlagt.

Sensuren faller i august 2010.

Oppgave 1



Et elektron befinner seg i en endimensjonal boks med en deltafunksjonsbarriere i midten,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{for } |x| > a, \\ \beta \delta(x) & \text{for } |x| < a. \end{cases}$$

Her er

$$\beta = 200 \hbar^2 / (m_e a).$$

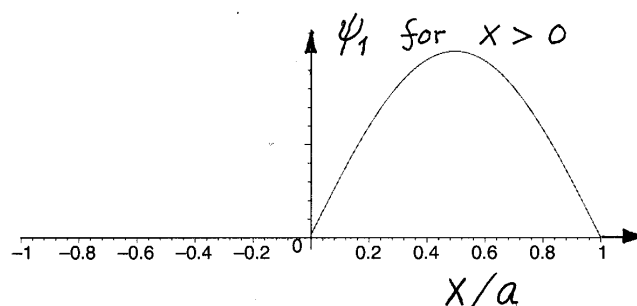
Det opplyses at energieigenfunksjoner i dette potensialet må oppfylle diskontinuitetsbetingelsen

$$\psi' / \psi|_{x=0^+} - \psi' / \psi|_{x=0^-} = \frac{2m_e \beta}{\hbar^2}.$$

a. •Forklar hvorfor første eksiterte tilstand ψ_2 har samme energi og bølgefunksjon som for tilfellet $\beta = 0$, dvs i fravær av deltabarrieren. •Skissér ψ_2 , og finn lengdeparameteren a uttrykt ved Bohr-radien a_0 , når det oppgis at energien til 1. eksiterte tilstand er en hundredel av en Rydberg,

$$E_2 = 0.01 \frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2}.$$

b. Figuren viser hvordan bølgefunksjonen ψ_1 for grunntilstanden ser ut for dette systemet, for $x > 0$. Fordi β er så stor, er $\psi_1(0)$ praktisk talt lik null (men positiv).



•Lag en skisse som viser ψ_1 for *alle* x , og angi hvilket prinsipp som ligger til grunn for skissen. •Forklar kort hvorfor ψ_1 for $0 < x < a$ kan skrives (f.eks) på formen $\psi_1 = -B \sin[k_1(x - a)]$, og angi formen til ψ_1 for $-a < x < 0$. •Finn (uten å gjennomføre beregningen) en ligning som kan brukes til å bestemme k_1 .

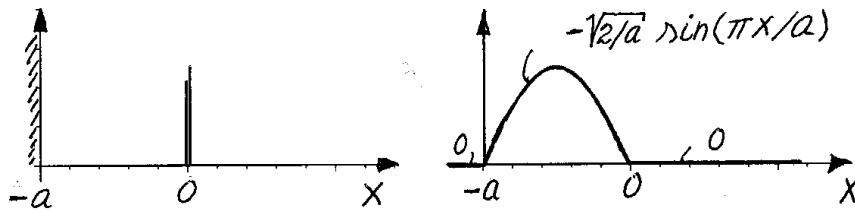
c. Anta nå at dette systemet prepareres i tilstanden

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x) + \psi_2(x)]$$

ved $t = 0$. •Hva blir da tilstanden $\Psi(x, t)$ for $t > 0$?

Vi antar at både ψ_1 og ψ_2 er normerte, og at fasevalget for ψ_2 er slik at $\psi_1 + \psi_2$ er praktisk talt lik null for $x < 0$. I tilstanden $\Psi(x, t)$ vil sannsynlighetstettheten da oscillere mellom høyre og venstre halvdel av potensialet. •Vis at periodetiden T for denne oscillasjonen kan uttrykkes bl.a ved energidifferansen mellom 1. eksiterte tilstand og grunntilstanden, og finn T i sekunder, når det oppgis at $E_2 - E_1 \approx 10^{-4} \hbar^2 / (2m_e a_0^2)$. [Hint: Spalt av en faktor $\exp(-iE_1 t / \hbar)$ i bølgefunksjonen. Oppgitt: $\hbar^2 / (2m_e a_0^2) = 13.6 \text{ eV}$, $2\pi\hbar = 4.136 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$.]

d. La oss nå begynne på nytt, med å fjerne den harde veggen ved $x = a$, slik at vi står igjen med et potensial som er uendelig for $x < -a$, mens δ -barrieren beholdes, slik at potensialet for $x > -a$ er lik $\beta\delta(x)$. Vi preparerer nå systemet slik at bølgefunksjonen ved $t = 0$ er $-\sqrt{2/a} \sin kx$ for $-a < x < 0$ og null ellers.



Her er bølgetallet $k = \pi/a$, slik at $\langle E \rangle = \hbar^2 k^2 / 2m_e = \hbar^2 \pi^2 / (2m_e a^2)$. Dersom vi tillater oss å tenke halvklassisk, vil elektronet sprette fram og tilbake mellom den harde veggen til venstre og den nesten ugjennomtrengelige δ -barrieren med farten $v = \sqrt{2\langle E \rangle / m_e}$.

• Finn tidsintervallet t_1 mellom hver kollisjon med barrieren, i sekunder.

For hver kollisjon er det en viss sannsynlighet T_{tr} for transmisjon gjennom barrieren. Ved å regne med en bølgefunksjon som er lik $e^{ikx} + Be^{-ikx}$ for $x < 0$ og lik Ce^{ikx} for $x > 0$ kan det vises at

$$C = \left(1 + \frac{im_e \beta}{\hbar^2 k} \right)^{-1}.$$

• Bruk disse opplysningene til å finne den numeriske verdien av sannsynligheten T_{tr} for transmisjon ved én enkelt kollisjon med barrieren. • Bruk disse resultatene til å finne et estimat av “levetiden” τ for begynnelsestilstanden, som vi definerer som den tiden det tar før sannsynligheten for å finne elektronet i intervallet $-a < x < 0$ er redusert med en faktor $1/e$. Finn τ i sekunder, og sammenlign med periodetiden T funnet under pkt. c. [Hint: For $\epsilon \ll 1$ er $1 - \epsilon \approx \exp(-\epsilon)$.]

Oppgave 2

I denne oppgaven betrakter vi et topartikkelsystem (eller snarere et ensemble av slike), der begge partikkene har spinn 1 (dvs $s_1 = s_2 = 1$):

$$|\mathbf{S}_1| = \hbar \sqrt{s_1(s_1 + 1)} = \hbar \sqrt{2} \quad \text{og} \quad |\mathbf{S}_2| = \hbar \sqrt{s_2(s_2 + 1)} = \hbar \sqrt{2}.$$

Ved en måling av S_{1z} og S_{2z} etterlates dette topartikkelsystemet i én av de 9 tilstandene $|m_1\rangle|m_2\rangle$, der $m_1 = -1, 0, 1$ og $m_2 = -1, 0, 1$. Her beskriver den første ket-vektoren spinnet til partikkel 1, mens den andre beskriver spinnet til partikkel 2.

Gjør vi i stedet en måling av størrelsen $|\mathbf{S}|$ og z -komponenten S_z av det *totale* spinnet $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ for dette topartikkelsystemet, vil det havne i en tilstand av typen $|s, m\rangle$, slik at $|\mathbf{S}| = \hbar \sqrt{s(s + 1)}$ og $S_z = \hbar m$. Vi antar at alle disse tilstandene er normerte.

a. • Skriv ned trekant-ulikheten som begrenser de mulige verdiene av kvantetallet s for dette topartikkelsystemet, *angi* de mulige s -verdiene, og *angi* for hver av disse de mulige verdiene av m . Kontrollér at antallet tilstander av typen $|s, m\rangle$ er lik antallet av typen $|m_1\rangle|m_2\rangle$, som var lik 9. • Hvorfor kan hver av tilstandene $|s, m\rangle$ uttrykkes som lineærkombinasjoner av tilstandene $|m_1\rangle|m_2\rangle$? • Vis at tilstanden $|m_1\rangle|m_2\rangle$ er en egentilstand (ikke bare til $\hat{\mathbf{S}}_1^2$, $\hat{\mathbf{S}}_2^2$, \hat{S}_{1z} og \hat{S}_{2z} , men også) til $\hat{S}_z = \hat{S}_{1z} + \hat{S}_{2z}$ og bestem egenverdien.

b. I denne oppgaven skal vi fokusere spesielt på tilstandene $|s, 0\rangle$ (med $m = 0$) som er

$$|s = 0, m = 0\rangle, \quad |s = 1, m = 0\rangle \quad \text{og} \quad |s = 2, m = 0\rangle.$$

Disse tre tilstandene kan alle uttrykkes som lineærkombinasjoner av typen

$$|s, 0\rangle = A|1\rangle|-1\rangle + B|0\rangle|0\rangle + C|-1\rangle|1\rangle,$$

der koeffisientene A , B og C selvsagt avhenger av s , og der $|1\rangle|-1\rangle$ står for $|m_1 = 1\rangle|m_2 = -1\rangle$ osv. •Hvorfor opptrer ingen av de 6 øvrige tilstandene av typen $|m_1\rangle|m_2\rangle$ i disse lineærkombinasjonene?

Det oppgis at

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}^2 (A|1\rangle|-1\rangle + B|0\rangle|0\rangle + C|-1\rangle|1\rangle) \\ = K \{ (A + B)|1\rangle|-1\rangle + (A + 2B + C)|0\rangle|0\rangle + (B + C)|-1\rangle|1\rangle \}, \end{aligned}$$

der K er et helt multiplum av \hbar^2 ($\neq 0$). •Bruk denne relasjonen til å finne en formel for tilstanden $|0, 0\rangle$ ($\equiv |s = 0, m = 0\rangle$). [Hint: Dette kan gjøres uten å kjenne K . Finn B og C uttrykt ved A , og velg A slik at $|0, 0\rangle$ blir normert.]

•Vis formelen ovenfor, og bestem dermed konstanten K . Hint: Fra formelarket følger det at $\hat{\mathbf{S}}^2 = \hat{S}_z^2 + \hbar\hat{S}_z + \hat{S}_-\hat{S}_+$. Med $i = 1$ (2) for partikkel 1 (2) følger det videre at

$$\hat{S}_{i\pm}|\pm 1_i\rangle = 0, \quad \hat{S}_{i\pm}|\mp 1_i\rangle = \hbar\sqrt{2}|0_i\rangle, \quad \text{og} \quad \hat{S}_{i\pm}|0_i\rangle = \hbar\sqrt{2}|\pm 1_i\rangle.$$

c. •Finn de normerte tilstandene $|1, 0\rangle$ og $|2, 0\rangle$, og kontrollér at disse sammen med $|0, 0\rangle$ danner et ortogonalt sett. [Hint: Dersom du ikke har funnet konstanten K , kan du sette den lik $2\hbar^2$.]

Oppgave 3

En partikkel med masse m befinner seg i utgangspunktet (ved $t = 0^-$) i grunntilstanden $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ i et endimensjonalt harmonisk oscillatorpotensial $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Partikkelen utsettes så for en transient (forbigående) perturbasjon

$$V_1(t) = -x p_0 \delta(t).$$

Denne svarer til et deltafunksjonsformet kraftstøt ("δ-spark") $F_1(t) = -\partial V_1/\partial x = p_0 \delta(t)$, og en impulsoverføring p_0 . Det kan vises at kraftstøtet resulterer i en ekstra faktor $\exp(ip_0x/\hbar)$ i bølgefunksjonen, som dermed umiddelbart etter perturbasjonen får formen

$$\Psi(x, 0^+) = e^{ip_0x/\hbar} \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{ip_0x/\hbar} e^{-m\omega x^2/2\hbar}.$$

Tilstanden for $t > 0$ blir i realiteten en såkalt koherent tilstand, der usikkerhetene i posisjon og impuls hele tiden er de samme som ved $t = 0^+$ (og ved $t = 0^-$), nemlig

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad \text{og} \quad \Delta p_x = \sqrt{\frac{1}{2}\hbar m\omega}.$$

a. Problemstillingen i denne oppgaven kan også angripes ved hjelp av 1.-ordens tids-avhengig perturbasjonsteori: • Finn matrise-elementene

$$(V_1)_{n0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) V_1(t) \psi_0(x) dx \equiv \langle n | \hat{V}_1(t) | 0 \rangle.$$

• Beregn overgangsamplitudene $a_{0 \rightarrow n}$, og de tilsvarende overgangssannsynlighetene $P_{0 \rightarrow n}$, etter at perturbasjonen er overstått, ved hjelp av 1.-ordens perturbasjonsteori. For å sette ting i perspektiv kan du uttrykke disse størrelsene ved det dimensjonsløse forholdet mellom p_0 og $2\Delta p_x$,

$$\alpha_0 \equiv \frac{p_0}{2\Delta p_x} = \frac{p_0}{\sqrt{2m\hbar\omega}}.$$

Opgitt:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger); \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle.$$

• Hva er, ut fra disse resultatene, sannsynligheten for å finne oscillatoren i grunntilstanden etter perturbasjonen? • Hvilket krav må stilles til impulsoverføringen p_0 (ev. til α_0) for at disse resultatene skal være gode tilnærmelser?

b. Fra den oppgitte tilstanden $\Psi(x, 0^+)$ er det nokså enkelt å beregne de *eksakte* resultatene for amplitudene (a_n^{eks}) og sannsynlighetene (P_n^{eks}). Amplitudene bestemmes av

$$\Psi(x, 0^+) = \sum_n a_n^{\text{eks}} \psi_n(x), \quad a_n^{\text{eks}} = \langle \psi_n, \Psi(0^+) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \Psi(x, 0^+) dx.$$

• Finn a_0^{eks} ved hjelp av integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-Ay^2 + By) dy = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{B^2}{4A}\right), \quad (\Re A > 0),$$

og vis at sannsynligheten for å finne oscillatoren i grunntilstanden etter perturbasjonen er $P_0^{\text{eks}} = \exp(-\alpha_0^2)$. • Sammenlign P_0^{eks} med resultatet for P_0 funnet i pkt. **a**. [Hint: P_0^{eks} kan rekkeutvikles vha formelen $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$.] For $\alpha_0^2 \gg 1$ ser vi at P_0^{eks} går veldig raskt mot null for økende α_0 . • Hva venter du vil skje med den eksakte sannsynligheten for å finne oscillatoren i 1. eksiterte tilstand når α_0 er stor og økende?

c. Relasjonen $a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$ tar i posisjonsrepresentasjonen formen

$$a_{\text{pr}} \psi_n(x) = \sqrt{n} \psi_{n-1}(x), \quad \text{der} \quad a_{\text{pr}} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \frac{i\hat{p}_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \quad \left(\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

• Vis eksplisitt at operatoren a_{pr} anvendt på $\Psi(x, 0^+) = \exp(ip_0 x/\hbar) \psi_0(x)$ gir

$$a_{\text{pr}} \Psi(x, 0^+) = \frac{ip_0}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \Psi(x, 0^+) \equiv i\alpha_0 \Psi(x, 0^+).$$

• Sett inn $\Psi(x, 0^+) = \sum_n a_n^{\text{eks}} \psi_n(x)$ i denne egenverdiligningen, og vis at

$$a_n^{\text{eks}} = \text{konst} \cdot \frac{\alpha_0}{\sqrt{n}} a_{n-1}^{\text{eks}},$$

der konstanten skal bestemmes.

d. • Finn den eksakte sannsynlighetsamplituden a_1^{eks} samt sannsynligheten P_1^{eks} , og sammenlign med resultatene i pkt. **a** og siste spørsmål i pkt. **b**. • Finn også P_2^{eks} og P_3^{eks} og generaliser til P_n^{eks} . • Anta at α_0 er stor, og finn ut for hvilken n sannsynligheten P_n^{eks} er størst.

Vedlegg: Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

Sannsynlighets-strømtetthet

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \Re \left[\Psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\hbar}{im} \nabla \Psi(\mathbf{r}, t) \right].$$

Stigeoperator-relasjoner for dreieimpuls

$$\hat{J}_{\pm} |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j \mp m)(j + 1 \pm m)} |j, m \pm 1\rangle; \quad \hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z + \hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z + \hat{J}_+ \hat{J}_-.$$

Målepostulatet

(i) De eneste mulige verdiene som en måling av observabelen F kan gi er en av egenverdiene f_n .

(ii) Umiddelbart etter målingen av F er systemet i en egentilstand til den tilhørende operatoren \hat{F} , nemlig en egentilstand som svarer til den målte egenverdien f_n .

Harmonisk oscillator

Energieigenfunksjonene for potensialet $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ ($-\infty < x < \infty$) oppfyller egenverdiligningen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \right] \psi_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

med løsninger på formen

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-m\omega x^2/2\hbar} H_n(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\hbar/m\omega}};$$

$$H_0(\xi) = 1, \quad H_1(\xi) = 2\xi, \quad H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, \quad \dots$$

Utgangspunktet for tidsavhengig perturbasjonsteori

Med en Hamilton-operator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$ kan den eksakte løsningen utvikles i de uperturberte stasjonære løsningene:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n a_n(t) \Psi_n^{(0)}(\mathbf{r}, t),$$

der

$$\Psi_n^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t/\hbar}, \quad \hat{H}_0 \psi_n(\mathbf{r}) = E_n \psi_n(\mathbf{r}).$$

Det eksakte ligningssettet for utviklingskoeffisientene er

$$i\hbar \frac{da_k}{dt} = \sum_n e^{i\omega_{kn}t} V_{kn}(t) a_n(t); \quad \omega_{kn} = (E_k - E_n)/\hbar;$$

$$V_{kn}(t) = \langle \psi_k | \widehat{V}(t) | \psi_n \rangle = \int \psi_k^* \widehat{V}(t) \psi_n d\tau.$$

Med $a_n(t_0) = \delta_{ni}$ oppfyller den eksakte amplituden ligningen

$$a_f(t) = \delta_{fi} + \frac{1}{i\hbar} \sum_n \int_{t_0}^t e^{i\omega_{fn}t'} V_{fn}(t') a_n(t') dt'.$$

Til første orden i perturbasjonen er da amplituden $a_f \equiv a_{i \rightarrow f}$ gitt ved

$$a_{i \rightarrow f} = \delta_{fi} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t e^{i\omega_{fi}t'} V_{fi}(t') dt'.$$

Noen fysiske konstanter

$$a_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{m_e c} = 0.529 \times 10^{-10} \text{m}; \quad \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.036};$$

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{m/s}; \quad \hbar = 0.6582 \times 10^{-15} \text{eVs}; \quad m_e = 0.5110 \text{MeV}/c^2.$$

$$\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2} \approx 13.6 \text{eV}.$$

Tidsutvikling av forventningsverdier

$$\frac{d}{dt} \langle F \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\widehat{H}, \widehat{F}] \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \widehat{F} \right\rangle.$$

δ -funksjonen og sprangfunksjonen

$$\frac{d}{dx} \Theta(x) = \delta(x); \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a).$$

Solution to
Exam 4. december 2010
FY2045/TFY4250 Quantum Mechanics I

Problem 1

a. ♠ A bound state for this potential must have energy $E < 0$. For $x \neq \pm a$, the time-independent Schrödinger equation then takes the form

$$\psi''_E = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E] \psi_E = - \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{>0} \psi_E \equiv \kappa^2 \psi_E, \quad \text{with} \quad \kappa \equiv \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(-E)}.$$

The general solution for the region $x > a$ has the form

$$\Psi_E = C e^{-\kappa x} + D e^{\kappa x}.$$

Here, we must set $D = 0$ in order to have a solution that does not diverge when $x \rightarrow \infty$. This is what we wanted to show.

♠ For $-a < x < a$, a symmetric energy eigenfunction must be a symmetric combination of $e^{\kappa x}$ and $e^{-\kappa x}$, and this is precisely the given form

$$\psi_E = A \cosh \kappa x = \frac{A}{2} (e^{\kappa x} + e^{-\kappa x}), \quad \text{q.e.d.}$$

♠ For $x < -a$, the energy eigenfunction must have the form $C' e^{\kappa x}$. This implies that the energy eigenfunction does not have any node in the regions $x < -a$ and $x > a$. Any possible node must therefore occur *between* the two wells. Since the above solution for $-a < x < a$ is also without nodes, it follows that the only symmetric bound state is the ground state, without nodes. If a next symmetric bound state were to exist, it should have two nodes (for $-a < x < a$) and that, as we see, is impossible.

b. ♠ An antisymmetric bound state must for $-a < x < a$ be an *antisymmetric* linear combination of $e^{\kappa x}$ and $e^{-\kappa x}$:

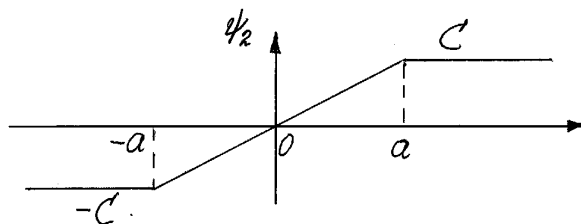
$$\psi = \frac{B}{2} (e^{\kappa x} - e^{-\kappa x}) = B \sinh \kappa x.$$

Then, ψ/B is positive for $0 < x < a$ and negative for $-a < x < 0$, and thus in the region between the wells has only the single node at the origin. From the above discussion we then realize that an antisymmetric bound state can have only one zero. This means that we can at most have two bound energy eigenfunctions, one symmetric, and possibly one antisymmetric.

♠ For $\beta = \beta_0$, the wells are just too “weak” to make the first excited state a *bound* state. This means that the energy of the first excited state is in this case equal to zero. From **a** we then have

$$\psi'' = - \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0$$

outside the delta-function wells, so that ψ becomes linear everywhere, except for $x = \pm a$, where it has kinks. Because the solution is not allowed to become infinite (for $x \rightarrow \pm\infty$), it follows that it must look like this:



With $\psi(a) = C$, $\psi'(a^+) = 0$ and $\psi'(a^-) = C/a$, it follows from the given discontinuity condition that

$$0 - \frac{C}{a} = -\frac{2m\beta_0}{\hbar^2} C \quad \Longleftrightarrow \quad \beta_0 = \frac{\hbar^2}{2ma}.$$

For $\beta > \beta_0$, we have a bound antisymmetric state with energy $E_2 < 0$. This energy eigenfunction will curve away from the axis (except in the points $x = \pm a$). For $\beta \leq \beta_0$, only the ground state is bound, while the first excited state is as sketched above. (The energy spectrum is continuous for $E \geq 0$.)

Problem 2

a. ♠ Suppose that the piston is at the position a . The ground state for particle 1 then has the form

$$\psi_1 = A \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z,$$

where $k_x a = \pi$, $k_y L_y = \pi$ og $k_z L_z = \pi$. Particle 1 then has the energy

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right).$$

In the same manner we find that the particle in chamber 2 has the energy

$$E_2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{1}{(L_x - a)^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right),$$

so that the total energy of the two particles is

$$E(a) = E_1 + E_2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(L_x - a)^2} + \frac{2}{L_y^2} + \frac{2}{L_z^2} \right).$$

This energy is minimal when

$$\frac{d}{da} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(L_x - a)^2} \right) = 2 \left[-\frac{1}{a^3} + \frac{1}{(L_x - a)^3} \right] = 0,$$

which is satisfied for $a = L_x - a$, that is for

$$a = a_0 = L_x/2.$$

[It is easily seen that the second derivative here is positive. Thus the energy really has a minimum, just as we expect intuitively.]

b. ♠ If we *imagine* that the piston is moved an infinitesimal distance da , the external force F_x will do a work which leads to a net energy increase $dE = F_x da$ for the two particles. Thus (from the calculation in i **a**),

$$F_x(a) = \frac{dE(a)}{da} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \cdot 2 \left[\frac{1}{(L_x - a)^3} - \frac{1}{a^3} \right].$$

At the equilibrium position, $a = a_0 = L_x/2$, this force is of course equal to zero.

♠ For $a = a_1 = L_x/3$, the force is

$$F_x(L_x/3) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{m} \left[\frac{1}{(L_x - L_x/3)^3} - \frac{1}{(L_x/3)^3} \right] = -\frac{7 \cdot 27}{8} \frac{\hbar^2 \pi^2}{m L_x^3}.$$

The sign tells us that this force point to the left; when chamber 1 is only half as long as chamber 2, the quantum pressure is highest in chamber 1.

♠ With 8 bosons in chamber 1 and only one in chamber 2, the energy in chamber 1 becomes 8 times larger than above, since all 8 bosons can be in the lowest one-particle state, even if they are identical. Thus this system has a total energy

$$E(a) = 8E_1 + E_2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left[\frac{8}{a^2} + \frac{1}{(L_x - a)^2} + 16(1/L_y^2 + 1/L_z^2) \right].$$

This is minimal when

$$\frac{d}{da} \left[\frac{8}{a^2} + \frac{1}{(L_x - a)^2} \right] = 2 \left[\frac{1}{(L_x - a)^3} - \frac{8}{a^3} \right] = 0,$$

which is satisfied when $a^3 = 8(L_x - a)^3$, that is, when $a = 2(L_x - a)$, that is, for

$$a = a_2 = 2L_x/3.$$

Problem 3

a. ♠ With

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\theta \\ \sin \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

we have that $2a_0^*b_0 = \sin \theta$ and $|a_0|^2 - |b_0|^2 = \cos \theta$. The spin direction immediately after the measurement then is

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_0 = \hat{\mathbf{x}} \Re(2a_0^*b_0) + \hat{\mathbf{y}} \Im(2a_0^*b_0) + \hat{\mathbf{z}} (|a_0|^2 - |b_0|^2) = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta.$$

♠ We calculate

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_0 \chi(0) &= \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{x}} \sin \theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta) \chi(0) = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\theta \\ \sin \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \frac{1}{2}\theta + \sin \theta \sin \frac{1}{2}\theta \\ \sin \theta \cos \frac{1}{2}\theta - \cos \theta \sin \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{1}{2}\theta) \\ \sin(\theta - \frac{1}{2}\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hbar \chi(0). \end{aligned}$$

Thus the initial state $\chi(0)$ is an eigenstate of $\mathbf{S} \cdot \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_0$ with the eigenvalue $\frac{1}{2} \hbar$.

♠ According to the measurement postulate, the measurement of $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ must give one of the eigenvalues $\pm \frac{1}{2} \hbar$ and leave the spin in the corresponding eigenstate. We can then conclude that the measurement direction was $\hat{\mathbf{n}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_0 = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta$, and that the measured result was $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = +\frac{1}{2} \hbar$.

b. ♠ The state of the spin for $t > 0$ must be a linear combination of the two stationary states of this system:

$$\chi(t) = c_+ \chi_+ e^{-i\omega t/2} + c_- \chi_- e^{i\omega t/2} = \begin{pmatrix} c_+ e^{-i\omega t/2} \\ c_- e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}.$$

Here we have used the energy eigenvalues $E_{\pm} = \omega S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar \omega$. For $t = 0$ we then have

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} \theta \\ \sin \frac{1}{2} \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad c_+ = \cos \frac{1}{2} \theta, \quad c_- = \sin \frac{1}{2} \theta,$$

so that the state for $t \geq 0$ is

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} \theta e^{-i\omega t/2} \\ \sin \frac{1}{2} \theta e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

With $2a^*b = \sin \theta e^{i\omega t}$ and $|a|^2 - |b|^2 = \cos \theta$, the spin direction at time t then is

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_t &= \hat{\mathbf{x}} \sin \theta \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}} \sin \theta \sin \omega t + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta \\ &= (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega t) \sin \theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta. \end{aligned}$$

Here, we see that the spin direction precesses around the direction $\hat{\mathbf{z}}$ of \mathbf{B} with the angular frequency ω .

c. ♠ From the formula for $\chi(t)$ we see that $\chi(2\pi/\omega) = -\chi(0)$. This change of sign of the spinor gives exactly the same $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi$ as at $t = 0$, in agreement with the formula for $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_t$.

♠ We remember that the measurement of $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{S} \cdot (\hat{\mathbf{x}} \sin \theta + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta) = \frac{1}{2} \hbar$ leaves the system in the state

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} \theta \\ \sin \frac{1}{2} \theta \end{pmatrix}.$$

In analogy, the measurement of $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}' = \mathbf{S} \cdot (\hat{\mathbf{x}} \sin \theta' + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta') = \frac{1}{2} \hbar$ will leave the system in the state

$$\chi_{\text{after}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2} \theta' \\ \sin \frac{1}{2} \theta' \end{pmatrix}.$$

♠ The probability *amplitude* of the latter result is the projection of the state before the measurement onto the state after the measurement, that is,

$$A = \chi_{\text{after}}^\dagger \chi_{\text{before}} = (\cos \frac{1}{2} \theta' \quad \sin \frac{1}{2} \theta') \begin{pmatrix} -\cos \frac{1}{2} \theta \\ -\sin \frac{1}{2} \theta \end{pmatrix} = -\cos(\frac{1}{2} \theta' - \frac{1}{2} \theta).$$

Thus the probability is

$$P = |A|^2 = \cos^2(\frac{1}{2} \theta' - \frac{1}{2} \theta) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\theta' - \theta)] = \frac{1}{2} [1 + \hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}].$$

Problem 4

a. ♠ By using the eigenvalue equation and its adjoint, $\langle \Psi | a_x^\dagger = \alpha^* \langle \Psi |$, we find that the expectation value of x in the state $|\Psi\rangle$ is

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \Psi | (a_x^\dagger + a_x) | \Psi \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha^* + \alpha), \quad \text{q.e.d.}$$

Similarly, we find that

$$\langle p_x \rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \langle \Psi | (a_x^\dagger - a_x) | \Psi \rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\alpha^* - \alpha), \quad \text{q.e.d.}$$

♠ Using the commutator relation $a_x a_x^\dagger = 1 + a_x^\dagger a_x$, we find that

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (a_x^\dagger + a_x)(a_x^\dagger + a_x) = \frac{\hbar}{2m\omega} (a_x^\dagger a_x^\dagger + a_x a_x + 2a_x^\dagger a_x + 1),$$

and similarly that

$$\hat{p}_x^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2} (a_x^\dagger a_x^\dagger + a_x a_x - 2a_x^\dagger a_x - 1).$$

This gives

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} [(\alpha^*)^2 + \alpha^2 + 2\alpha^* \alpha + 1] = \frac{\hbar}{2m\omega} [(\alpha^* + \alpha)^2 + 1]$$

and

$$\langle \hat{p}_x^2 \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2} [1 - (\alpha^* - \alpha)^2].$$

Using these results, we find the uncertainties

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad \text{and} \quad \Delta p_x = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}},$$

which give $\Delta x \Delta p_x = \frac{1}{2} \hbar$.

b. ♠ The probability density of the initial state,

$$|\Psi_b(x, y, 0)|^2 = C_0^4 e^{-m\omega(x-b)^2/\hbar} e^{-m\omega y^2/\hbar},$$

is symmetric with respect to the line $x = b$ and also with respect to the line $y = 0$. This means that

$$\langle x \rangle_0 = b \quad \text{and} \quad \langle y \rangle_0 = 0.$$

♠ Calculating

$$\begin{aligned} a_x^{\text{pr}} \Psi_b(x, y, 0) &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi_b(x, y, 0) \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{\hbar}{m\omega} (m\omega(x-b)/\hbar) \right) \Psi_b(x, y, 0) \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} b \Psi_b(x, y, 0), \end{aligned}$$

we see that the initial state is indeed an eigenstate of a_x^{pr} , with the eigenvalue

$$\alpha_x(0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} b.$$

In the same manner we find that

$$\begin{aligned} a_y^{\text{pr}} \Psi_b(x, y, 0) &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(y + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial y} \right) \Psi_b(x, y, 0) \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(y + \frac{\hbar}{m\omega} (-m\omega y/\hbar + im\omega b/\hbar) \right) \Psi_b(x, y, 0) \\ &= i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} b \Psi_b(x, y, 0). \end{aligned}$$

Thus the eigenvalue of a_y^{pr} is

$$\alpha_y(0) = i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} b = i\alpha_x(0), \quad \text{q.e.d.}$$

c. ♠ From the above results, it follows that

$$\langle x \rangle_t = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [\alpha_x(t) + \alpha_x^*(t)] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cdot 2\Re(\alpha_x(0) e^{-i\omega t}) = b \cos \omega t$$

and

$$\langle y \rangle_t = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [\alpha_y(t) + \alpha_y^*(t)] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cdot 2\Re(i\alpha_x(0) e^{-i\omega t}) = b \sin \omega t.$$

As a check, we note that the values for $t = 0$ agree with the results in **b**.

♠ Since

$$\langle x \rangle_t^2 + \langle y \rangle_t^2 = b^2,$$

we can state that the expectation value of the position is moving in a circular orbit with radius b , and with angular velocity ω .

♠ We start by noting that the product of the two one-dimensional solutions reproduces the initial state specified above. Then it only remains to show that this product satisfies the time-dependent Schrödinger equation: Inserting, we find that

$$\begin{aligned} \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \widehat{H} \right] \Psi_x(x, t) \Psi_y(y, t) &= \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \widehat{H}^{(x)} - \widehat{H}^{(y)} \right] \Psi_x(x, t) \Psi_y(y, t) \\ &= \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_x(x, t) \right] \Psi_y(y, t) + \Psi_x(x, t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_y(y, t) \\ &\quad - \left[\widehat{H}^{(x)} \Psi_x(x, t) \right] \Psi_y(y, t) - \Psi_x(x, t) \widehat{H}^{(y)} \Psi_y(y, t) \\ &= \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \widehat{H}^{(x)} \right) \Psi_x(x, t) \right] \Psi_y(y, t) + \Psi_x(x, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \widehat{H}^{(y)} \right) \Psi_y(y, t) \\ &= 0, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$