Løsningsforslag
Eksamen 4. desember 2010
FY2045/TFY4250 Kvantemekanikk I

Oppgave 1

a. ♠En bunden tilstand i det aktuelle potensialet må ha energi $E < 0$. For $x \neq \pm a$ tar den tidsuavhengige Schrödingerligningen da formen

$$\psi_E'' = \frac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]\psi_E = \underbrace{-\frac{2mE}{\hbar^2}}_{>0}\,\Psi_E \equiv \kappa^2\psi_E\ , \quad \text{med} \quad \kappa \equiv \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(-E)}.$$

Den generelle løsningen for området $x > a$ har formen

$$\Psi_E = C\,e^{-\kappa x} + D\,e^{\kappa x}.$$

Her må vi sette $D = 0$ for å få en løsning som ikke går mot uendelig når $x \to \infty$. Det var dette vi skulle vise.

♠For $-a < x < a$ må en symmetrisk energiegenfunksjon være en symmetrisk kombinasjon av $e^{\kappa x}$ og $e^{-\kappa x}$, og dette er nettopp

$$\psi_E = A\cosh\kappa x = \frac{A}{2}(e^{\kappa x} + e^{-\kappa x}), \quad \text{q.e.d.}$$

♠For $x < -a$ må energiegenfunksjonen ha formen $C'e^{\kappa x}$. Dette innebærer at energiegenfunksjonen er fri for nullpunkter både for $x < -a$ og for $x > a$. Eventuelle nullpunkter må derfor ligge *mellom* de to brønnene. Da løsningen ovenfor for $-a < x < a$ er fri for nullpunkter, følger det at den eneste symmetriske bundne tilstanden er grunntilstanden, uten nullpunkter. Dersom det skulle eksistere en neste symmetrisk bunden tilstand (en 2. eksiterte), måtte denne ha to nullpunkter (for $-a < x < a$) og det er altså ikke mulig.

b. ♠En antisymmetrisk bunden tilstand må for $-a < x < a$ være en *antisymmetrisk* lineærkombinasjon av $e^{\kappa x}$ og $e^{-\kappa x}$:

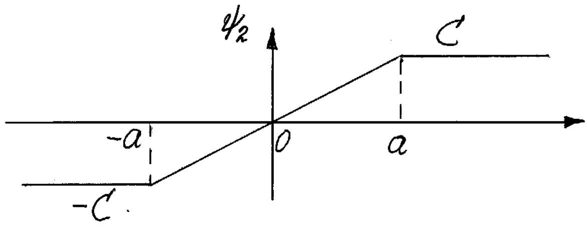
$$\psi = \frac{B}{2}(e^{\kappa x} - e^{-\kappa x}) = B\sinh\kappa x.$$

Da er ψ/B positiv for $0 < x < a$ og negativ for $-a < x < 0$, og har følgelig i dette området mellom brønnene bare det ene nullpunktet i origo. Fra diskusjonen ovenfor innser vi da at dette er det eneste nullpunktet en antisymmetrisk bunden tilstand kan ha. Vi kan altså maksimalt ha to bundne energiegenfunksjoner, én symmetrisk og muligens én antisymmetrisk. .

♠For $\beta = \beta_0$ er brønnene akkurat for svake til å gi binding for 1. eksiterte tilstand, dvs at energien for denne tilstanden er lik null. Fra pkt. **a** har vi da at

$$\psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2}\,\psi = 0$$

utenfor delta-brønnene, slik at ψ må være lineær over alt, unntatt for $x = \pm a$, hvor den har knekkpunkter. Løsningen ser da slik ut (idet ψ ikke får lov til å gå mot uendelig for $x \to \pm\infty$):



Med $\psi(a) = C$, $\psi'(a^+) = 0$ og $\psi'(a^-) = C/a$ har vi fra den oppgitte diskontinuitets-betingelsen:

$$0 - \frac{C}{a} = -\frac{2m\beta_0}{\hbar^2}C \qquad \Longleftrightarrow \qquad \beta_0 = \frac{\hbar^2}{2ma}.$$

For $\beta > \beta_0$ har vi en bunden antisymmetrisk tilstand med energi $E_2 < 0$. Denne vil krumme bort fra aksen (unntatt i punktene $x = \pm a$). For $\beta \leq \beta_0$ er bare grunntilstanden bunden, mens første eksiterte tilstand er som skissert ovenfor. (Husk at energispektret er kontinuerlig for $E \geq 0$.)

Oppgave 2

a. ♠Anta at stempelet er i posisjonen a. I grunntilstanden har energiegenfunksjonen for partikkelen i kammer 1 da formen

$$\psi_1 = A \sin k_x x \, \sin k_y y \, \sin k_z z,$$

der $k_x a = \pi$, $k_y L_y = \pi$ og $k_z L_z = \pi$. Partikkel 1 har da energien

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2}\right).$$

På tilsvarende måte finner vi at partikkelen i kammer 2 har energien

$$E_2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{1}{(L_x - a)^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2}\right),$$

slik at den totale energien til de to partiklene er

$$E(a) = E_1 + E_2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(L_x - a)^2} + \frac{2}{L_y^2} + \frac{2}{L_z^2}\right).$$

Denne er minimal når

$$\frac{d}{da}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(L_x - a)^2}\right) = 2\left[-\frac{1}{a^3} + \frac{1}{(L_x - a)^3}\right] = 0,$$

som er oppfylt for $a = L_x - a$, dvs for

$$a = a_0 = L_x/2.$$

[Det er lett å sjekke at den andrederiverte her er positiv, slik at energien virkelig har et minimum, noe vi vel senser intuitivt.]

b. ♠Dersom vi *tenker oss* at stempelet beveges et stykke da, vil den ytre kraften F_x utføre et arbeid som svarer til en netto energiøkning $dE = F_x da$ for de to partiklene. Vi har altså (fra utregningen i pkt. **a**)

$$F_x(a) = \frac{dE(a)}{da} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m} \cdot 2 \left[\frac{1}{(L_x - a)^3} - \frac{1}{a^3} \right].$$

I likevektsposisjonen $a = a_0 = L_x/2$ er denne kraften selvsagt lik null.

♠For $a = a_1 = L_x/3$ er den

$$F_x(L_x/3) = \frac{\hbar^2\pi^2}{m} \left[\frac{1}{(L_x - L_x/3)^3} - \frac{1}{(L_x/3)^3} \right] = -\frac{7 \cdot 27}{8} \frac{\hbar^2\pi^2}{mL_x^3}.$$

Fortegnet forteller at kraften peker mot venstre; når kammer 1 er bare halvparten så langt som kammer 2, er kvantetrykket størst i kammer 1.

♠Med 8 bosoner i kammer 1 og ett i kammer 2, blir energien i kammer 1 åtte ganger så stor som ovenfor, idet alle de 8 bosonene kan være i den laveste én-partikkel-tilstanden, til tross for at de er identiske. Systemet har altså nå en total energi

$$E(a) = 8E_1 + E_2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m} \left[\frac{8}{a^2} + \frac{1}{(L_x - a)^2} + 16(1/L_y^2 + 1/L_z^2) \right].$$

Denne er minimal når

$$\frac{d}{da} \left[\frac{8}{a^2} + \frac{1}{(L_x - a)^2} \right] = 2 \left[\frac{1}{(L_x - a)^3} - \frac{8}{a^3} \right] = 0,$$

som er oppfylt når $a^3 = 8(L_x - a)^3$, dvs når $a = 2(L_x - a)$, dvs for

$$a = a_2 = 2L_x/3.$$

Oppgave 3

a. ♠Med

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta \\ \sin\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

har vi at $2a_0^* b_0 = \sin\theta$ og $|a_0|^2 - |b_0|^2 = \cos\theta$. Spinnretningen umiddelbart etter målingen er da

$$\langle\, \boldsymbol{\sigma} \,\rangle_0 = \hat{\mathbf{x}}\, \Re\mathrm{e}(2a_0^* b_0) + \hat{\mathbf{y}}\, \Im\mathrm{m}(2a_0^* b_0) + \hat{\mathbf{z}}\, (|a_0|^2 - |b_0|^2) = \hat{\mathbf{x}} \sin\theta + \hat{\mathbf{z}} \cos\theta.$$

♠Vi regner ut

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\cdot \langle\, \boldsymbol{\sigma} \,\rangle_0 \, \chi(0) &= \tfrac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\mathbf{x}}\sin\theta + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta)\,\chi(0) = \tfrac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta \\ \sin\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{1}{2}\theta + \sin\theta\sin\frac{1}{2}\theta \\ \sin\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \cos\theta\sin\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{1}{2}\theta) \\ \sin(\theta - \frac{1}{2}\theta) \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\hbar\,\chi(0). \end{aligned}$$

Begynnelsestilstanden $\chi(0)$ er altså en egentilstand til $\mathbf{S}\cdot \langle\, \boldsymbol{\sigma} \,\rangle_0$ med egenverdien $\frac{1}{2}\hbar$.

♠Ifølge målepostulatet skal målingen av $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ gi en av egenverdiene $\pm\frac{1}{2}\hbar$ og etterlate spinnet i den tilsvarende egentilstanden. Vi kan da konkludere med at måleretningen var $\hat{\mathbf{n}} = \langle\, \boldsymbol{\sigma} \,\rangle_0 = \hat{\mathbf{x}}\, \sin\theta + \hat{\mathbf{z}}\, \cos\theta$, og at måleresultatet var $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}} = +\frac{1}{2}\hbar$.

b. ♠Spinntilstanden for $t > 0$ må være en lineærkombinasjon av de to stasjonære tilstandene:

$$\chi(t) = c_+\chi_+ e^{-i\omega t/2} + c_-\chi_- e^{i\omega t/2} = \begin{pmatrix} c_+ e^{-i\omega t/2} \\ c_- e^{i\omega t/2} \end{pmatrix}.$$

Her har vi brukt at energiegenverdiene er $E_\pm = \omega S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar\omega$. For $t = 0$ har vi da

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta \\ \sin\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad c_+ = \cos\tfrac{1}{2}\theta, \quad c_- = \sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

slik at tilstanden for $t \geq 0$ er

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta\, e^{-i\omega t/2} \\ \sin\frac{1}{2}\theta\, e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Med $2a^*b = \sin\theta e^{i\omega t}$ og $|a|^2 - |b|^2 = \cos\theta$ blir spinnretningen ved tiden t da

$$\begin{aligned} \langle\, \boldsymbol{\sigma}\, \rangle_t &= \hat{\mathbf{x}}\, \sin\theta\, \cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}\, \sin\theta\, \sin\omega t + \hat{\mathbf{z}}\, \cos\theta \\ &= (\hat{\mathbf{x}}\, \cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}\, \sin\omega t)\, \sin\theta + \hat{\mathbf{z}}\, \cos\theta. \end{aligned}$$

Her ser vi at spinnretningen preseserer omkring $\mathbf{B}$-retningen ($\hat{\mathbf{z}}$) med vinkelfrekvensen ω.

c. ♠Fra formelen for $\chi(t)$ ser vi at $\chi(2\pi/\omega) = -\chi(0)$. Dette fortegnsskiftet i spinoren gir akkurat samme $\langle\, \boldsymbol{\sigma}\, \rangle = \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \chi$ som ved $t = 0$, i overensstemmelse med formelen for $\langle\, \boldsymbol{\sigma}\, \rangle_t$.

♠Analogt med målingen av $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{S}\cdot(\hat{\mathbf{x}}\, \sin\theta + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta) = \frac{1}{2}\hbar$ etterlater systemet i tilstanden

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta \\ \sin\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix},$$

vil målingen av $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}' = \mathbf{S}\cdot(\hat{\mathbf{x}}\, \sin\theta' + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta') = \frac{1}{2}\hbar$ etterlate systemet i tilstanden

$$\chi_{\text{etter}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta' \\ \sin\frac{1}{2}\theta' \end{pmatrix}.$$

♠Sannsynlighetsamplituden for det siste resultatet er projeksjonen av tilstanden før målingen på tilstanden etter målingen, dvs

$$A = \chi^\dagger_{\text{etter}}\chi_{\text{før}} = (\cos\tfrac{1}{2}\theta' \;\; \sin\tfrac{1}{2}\theta') \begin{pmatrix} -\cos\frac{1}{2}\theta \\ -\sin\frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} = -\cos(\tfrac{1}{2}\theta' - \tfrac{1}{2}\theta).$$

Sannsynligheten er altså

$$P = |A|^2 = \cos^2(\tfrac{1}{2}\theta' - \tfrac{1}{2}\theta) = \tfrac{1}{2}[1 + \cos(\theta' - \theta)] = \tfrac{1}{2}[1 + \hat{\mathbf{n}}'\cdot\hat{\mathbf{n}}].$$

Oppgave 4

a. ♠Ved å bruke egenverdiligningen og dennes adjungerte, $\langle\Psi|a_x^\dagger = \alpha^*\langle\Psi|$, finner vi at forventningsverdien av x i tilstanden $|\Psi\rangle$ er

$$\langle\, x\, \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, \langle\Psi|(a_x^\dagger + a_x)|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, (\alpha^* + \alpha), \quad \text{q.e.d.}$$

Tilsvarende er

$$\langle\, p_x \,\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\langle\,\Psi\,|(a_x^\dagger - a_x)|\,\Psi\,\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(\alpha^* - \alpha), \quad \text{q.e.d.}$$

♠Vha kommutator-relasjonen $a_x a_x^\dagger = 1 + a_x^\dagger a_x$ har vi at

$$\widehat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a_x^\dagger + a_x)(a_x^\dagger + a_x) = \frac{\hbar}{2m\omega}(a_x^\dagger a_x^\dagger + a_x a_x + 2a_x^\dagger a_x + 1),$$

og tilsvarende

$$\widehat{p}_x^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}(a_x^\dagger a_x^\dagger + a_x a_x - 2a_x^\dagger a_x - 1).$$

Dette gir

$$\left\langle\, x^2 \,\right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}[(\alpha^*)^2 + \alpha^2 + 2\alpha^*\alpha + 1] = \frac{\hbar}{2m\omega}[(\alpha^* + \alpha)^2 + 1]$$

og tilsvarende

$$\left\langle\, \widehat{p}_x^2 \,\right\rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}[1 - (\alpha^* - \alpha)^2].$$

Vha disse resultatene finner vi usikkerhetene

$$\Delta x = \sqrt{\langle\, x^2 \,\rangle - \langle\, x \,\rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \qquad \text{og} \qquad \Delta p_x = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}},$$

som gir $\Delta x \Delta p_x = \frac{1}{2}\hbar$.

<u>**b.**</u> ♠Sannsynlighetstettheten i begynnelsestilstanden,

$$|\Psi_b(x, y, 0)|^2 = C_0^4 e^{-m\omega(x-b)^2/\hbar} e^{-m\omega y^2/\hbar},$$

er symmetrisk mhp linjen $x = b$ og mhp linjen $y = 0$. Følgelig er

$$\langle\, x \,\rangle_0 = b \qquad \text{og} \qquad \langle\, y \,\rangle_0 = 0.$$

♠Vi regner ut

$$\begin{aligned}
a_x^{\text{pr}}\Psi_b(x, y, 0) &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi_b(x, y, 0) \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{\hbar}{m\omega}(m\omega(x - b)/\hbar)\right)\Psi_b(x, y, 0) \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, b\,\Psi_b(x, y, 0).
\end{aligned}$$

Begynnelsestilstanden er altså ganske riktig en egentilstand til a_x^{pr} med egenverdien

$$\alpha_x(0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, b.$$

Tilsvarende er

$$
\begin{aligned}
a_y^{\text{pr}}\Psi_b(x,y,0) &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(y+\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_b(x,y,0) \\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(y+\frac{\hbar}{m\omega}(-m\omega y/\hbar + im\omega b/\hbar)\right)\Psi_b(x,y,0) \\
&= i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,b\,\Psi_b(x,y,0).
\end{aligned}
$$

Egenverdien til a_y^{pr} er altså

$$\alpha_y(0) = i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,b = i\alpha_x(0), \quad \text{q.e.d.}$$

c. ♠Fra resultatene ovenfor har vi

$$\langle\, x\,\rangle_t = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\alpha_x(t)+\alpha_x^*(t)\right] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cdot 2\Re\text{e}\left(\alpha_x(0)\,e^{-i\omega t}\right) = b\cos\omega t$$

og

$$\langle\, y\,\rangle_t = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\alpha_y(t)+\alpha_y^*(t)\right] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cdot 2\Re\text{e}\left(i\alpha_x(0)\,e^{-i\omega t}\right) = b\sin\omega t.$$

Som en kontroll ser vi at verdiene for $t=0$ stemmer med resultatene i pkt. **b**.

♠Da

$$\langle\, x\,\rangle_t^2 + \langle\, y\,\rangle_t^2 = b^2,$$

ser vi at forventningsverdien av posisjonen beveger seg på en sirkelbane med radius b, og med vinkelhastighet ω.

♠Vi noterer først at produktløsningen reproduserer den korrekte begynnelsestilstanden. Da gjenstår det bare å vise at den oppfyller Schrödingerligningen: Innsetting gir

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\widehat{H}\right]\Psi_x(x,t)\Psi_y(y,t) = \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\widehat{H}^{(x)}-\widehat{H}^{(y)}\right]\Psi_x(x,t)\Psi_y(y,t)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi_x(x,t)\right]\Psi_y(y,t) + \Psi_x(x,t)i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi_y(y,t) \\
&\quad - \left[\widehat{H}^{(x)}\Psi_x(x,t)\right]\Psi_y(y,t) - \Psi_x(x,t)\,\widehat{H}^{(y)}\Psi_y(y,t) \\
&= \left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\widehat{H}^{(x)}\right)\Psi_x(x,t)\right]\Psi_y(y,t) + \Psi_x(x,t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\widehat{H}^{(y)}\right)\Psi_y(y,t) \\
&= 0, \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$