Eksamen i Klassisk feltteori, fag TFY 4270
Onsdag 26. mai 2004
Løsninger

1a) Sammenhengen mellom koordinattiden t og egentiden τ er at

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\,\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\;.$$

Den relativistiske impulsen er

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau}\;.$$

Hamiltonfunksjonen er

$$H = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\;.$$

Siden

$$p^2 = \frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2c^2v^2}{c^2-v^2}\;,$$

har vi at

$$v^2 = \frac{p^2c^2}{p^2+m^2c^2}\;.$$

Innsatt gir det at

$$H = c\,\sqrt{p^2+m^2c^2}\;.$$

1b) Symmetrier og tilhørende bevaringslover, i følge Noethers teorem:
– Translasjonssymmetri i tid og rom, impliserer bevaring av energi og impuls.
– Rotasjonssymmetri, impliserer bevaring av dreieimpuls.
– Diskrete refleksjonssymmetrier, som ikke impliserer bevaringslover, er tidsreversjonssymmetri og paritetssymmetri.

1c) Tidsderivasjon av definisjonsligningene

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2+a^2}\,\sin\theta\,\cos\varphi\ , \\ y &= \sqrt{r^2+a^2}\,\sin\theta\,\sin\varphi\ , \\ z &= r\,\cos\theta\ , \end{aligned}$$

(der a selvfølgelig er en konstant, selv om det ikke ble sagt i oppgaveteksten) gir at

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{r\dot{r}}{\sqrt{r^2+a^2}}\,\sin\theta\,\cos\varphi + \dot{\theta}\,\sqrt{r^2+a^2}\,\cos\theta\,\cos\varphi - \dot{\varphi}\,\sqrt{r^2+a^2}\,\sin\theta\,\sin\varphi\ , \\ \dot{y} &= \frac{r\dot{r}}{\sqrt{r^2+a^2}}\,\sin\theta\,\sin\varphi + \dot{\theta}\,\sqrt{r^2+a^2}\,\cos\theta\,\sin\varphi + \dot{\varphi}\,\sqrt{r^2+a^2}\,\sin\theta\,\cos\varphi\ , \\ \dot{z} &= \dot{r}\,\cos\theta - \dot{\theta}r\,\sin\theta\ . \end{aligned}$$

Når vi regner ut $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, forsvinner mirakuløst alle kryssledd (med $\dot{r}\dot{\theta}$, $\dot{r}\dot{\varphi}$ og $\dot{\theta}\dot{\varphi}$), og vi står igjen med

$$v^2 = \frac{(r^2+a^2\cos^2\!\theta)\,\dot{r}^2}{r^2+a^2} + (r^2+a^2\cos^2\!\theta)\,\dot{\theta}^2 + (r^2+a^2)\sin^2\!\theta\,\dot{\varphi}^2\ .$$

La oss skrive Lagrange-funksjonen som $L = -mcw$, der $w = \sqrt{c^2-v^2}$. Da har vi at

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{mc}{2w}\,\frac{\partial v^2}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{mc}{2w}\,2(r^2+a^2)\sin^2\!\theta\ \dot{\varphi} = m(r^2+a^2)\sin^2\!\theta\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\ ,$$

idet $w\,\mathrm{d}t = c\,\mathrm{d}\tau$.
At p_φ er en bevegelseskonstant, følger direkte av Euler–Lagrange-ligningen

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = 0\ ,$$

siden φ er en syklisk koordinat, dvs. at $\partial L/\partial\varphi = 0$.
Den ansvarlige symmetrien er rotasjonssymmetri om z-aksen. Følgelig er p_φ lik dreieimpulsen om z-aksen.

1d) Definisjonen av P_μ gir at

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu} = -\frac{mc}{2w}\,(g_{\mu\sigma}\,\dot{x}^\sigma + g_{\rho\mu}\,\dot{x}^\rho) = -m\,g_{\mu\sigma}\,\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau}\ .$$

Eller omvendt,

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{m}\,g^{\mu\nu}P_\nu\ .$$

Definisjonen av P_μ sammen med Euler–Lagrange-ligningen gir også umiddelbart at

$$\frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu}\right) = \left.\frac{\partial L}{\partial x^\mu}\right|_{\dot{x}} = -\frac{mc}{2w}\,g_{\rho\sigma,\mu}\,\dot{x}^\rho\dot{x}^\sigma\ .$$

Merk at vi skal derivere L med hensyn på x^μ ved konstant hastighet $\dot{x}^\nu = \mathrm{d}x^\nu/\mathrm{d}u$.
Når vi multipliserer denne ligningen med c/w og bruker at $w\,\mathrm{d}u = c\,\mathrm{d}\tau$, får vi at

$$\frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{m}{2}\,g_{\rho\sigma,\mu}\,\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{2m}\,g_{\rho\sigma,\mu}\,g^{\rho\kappa}\,g^{\sigma\lambda}\,P_\kappa P_\lambda = \frac{1}{2m}\,g^{\kappa\lambda}{}_{,\mu}\,P_\kappa P_\lambda\ .$$

Vi bruker identiteten

$$g_{\rho\sigma,\mu}\, g^{\rho\kappa}\, g^{\sigma\lambda} = -g^{\kappa\lambda}{}_{,\mu} \; ,$$

som bevises ved derivasjon av identiteten

$$g_{\rho\sigma}\, g^{\sigma\lambda} = \delta_\rho^\lambda \; .$$

Vi ser nå at Euler–Lagrange-ligningene er ekvivalente med Hamiltons ligninger

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial H'}{\partial P_\mu} \; , \qquad \frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} = -\left.\frac{\partial H'}{\partial x^\mu}\right|_P \; ,$$

med Hamilton-funksjonen

$$H' = -\frac{1}{2m}\, g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu \; .$$

Merk at vi skal derivere H' med hensyn på x^μ ved konstant impuls P_ν, og ikke ved konstant hastighet $\mathrm{d}x^\nu/\mathrm{d}u$.
Merk også at den vanlige definisjonen av Hamilton-funksjonen H, nemlig

$$H = P_\mu \dot{x}^\mu - L \; ,$$

ikke fungerer i dette tilfellet, fordi den gir $H = 0$ identisk. Den Hamilton-funksjonen H' som vi bruker her, er simpelthen definert slik at den gir de riktige bevegelsesligningene når egentiden τ brukes som tidsparameter. Dette poenget burde kanskje ha vært påpekt i oppgaveteksten, det ville ha forhindret at noen lot seg lure til å bruke relasjonen $H' = P_\mu \dot{x}^\mu - L$, som ikke er korrekt.

2a) Hvis vi setter inn $r =$ konstant og $\varphi =$ konstant i linjeelementet $\mathrm{d}s^2$, gir det at $\mathrm{d}r = 0$ og $\mathrm{d}\varphi = 0$, følgelig

$$\mathrm{d}s^2 = A\,\mathrm{d}t^2 = \left(1 - \frac{R_M}{r}\right) c^2\,\mathrm{d}t^2 \; .$$

Når $r < R_M$, gir dette at $\mathrm{d}s^2 < 0$, altså har vi et romlikt intervall. Det betyr i så fall at partikkelen beveger seg med hastighet større enn lyshastigheten, og slike partikler er ennå aldri observert, selv om de har fått navn og kalles tachyoner.

2b) (Merk en trykkfeil i oppgaven: det burde stå $g_{11} = -D$ og ikke $g_{22} = -D$.)
Hvis vi setter inn $t =$ konstant og $\varphi =$ konstant i linjeelementet $\mathrm{d}s^2$, gir det at $\mathrm{d}t = 0$ og $\mathrm{d}\varphi = 0$, følgelig

$$\mathrm{d}s^2 = -D\,\mathrm{d}r^2 = -\frac{r^2\,\mathrm{d}r^2}{r^2 - R_M r + a^2} \; .$$

Når $r_- < r < r_+$, gir dette at $\mathrm{d}s^2 > 0$, som betyr at r er en tidskoordinat. Det betyr videre at en partikkel som faller innover forbi $r = r_+$, aldri kan snu og bevege seg utover igjen, fordi den ikke kan bevege seg bakover i tiden. Altså er $r = r_+$ en horisont, som det er umulig for en utenforstående å se forbi, og denne horisonten er til stede uavhengig av hvilket koordinatsystem vi bruker. Den andre spesielle verdien, $r = r_-$, er en "indre horisont", som også er koordinatuavhengig.
Vi ser at Schwarzschild-metrikken er et grensetilfelle av Kerr-metrikken bl.a. ved at den statiske grensen $r = R_M$ og horisonten $r = r_+$ faller sammen.

2c) Med koordinatene $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$ har vi den metriske tensoren

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A/c^2 & 0 & B/c \\ 0 & -D & 0 \\ B/c & 0 & -C \end{pmatrix} .$$

For å finne Hamilton-funksjonen H' må vi finne den inverse matrisen $g^{\mu\nu}$. I dette tilfellet er det ikke vanskeligere å invertere 3×3-matrisen $g_{\mu\nu}$ enn å invertere 2×2-matrisen

$$\begin{pmatrix} A/c^2 & B/c \\ B/c & -C \end{pmatrix} .$$

Vi har at

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} Cc^2/(AC+B^2) & 0 & Bc/(AC+B^2) \\ 0 & -1/D & 0 \\ Bc/(AC+B^2) & 0 & -A/(AC+B^2) \end{pmatrix} .$$

Når vi definerer $P_t = cP_0$, $P_r = P_1$ og $P_\varphi = P_2$, gir det at

$$H' = -\frac{1}{2m}\left(\frac{C{P_t}^2 + 2BP_tP_\varphi - A{P_\varphi}^2}{AC+B^2} - \frac{{P_r}^2}{D}\right) = -\frac{1}{2m}\left(\frac{{P_t}^2}{A} - \frac{(AP_\varphi - BP_t)^2}{A(AC+B^2)} - \frac{{P_r}^2}{D}\right) .$$

Merk at regningen blir en liten smule enklere, ved at vi unngår de ekstra faktorene c og c^2, hvis vi bruker koordinatene $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, som gir den metriske tensoren

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & -D & 0 \\ B & 0 & -C \end{pmatrix} .$$

2d) Hamiltons ligninger:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\partial H'}{\partial P_t} = -\frac{CP_t + BP_\varphi}{m(AC+B^2)} \,, \\ \frac{\mathrm{d}P_t}{\mathrm{d}\tau} &= -\frac{\partial H'}{\partial t} = 0 \,, \\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\partial H'}{\partial P_\varphi} = -\frac{BP_t - AP_\varphi}{m(AC+B^2)} \,, \\ \frac{\mathrm{d}P_\varphi}{\mathrm{d}\tau} &= -\frac{\partial H'}{\partial \varphi} = 0 \,. \end{aligned}$$

Som vi ser av disse ligningene, er P_t og P_φ bevegelseskonstanter fordi metrikken er uavhengig av t og φ.
At metrikken er uavhengig av t, vil si at den er tidstranslasjonsinvariant, og den bevaringsloven som hører sammen med denne symmetrien, er energibevaring. Altså er P_t energien til partikkelen (i hvert fall proporsjonal med energien).
At metrikken er uavhengig av φ, vil si at den er rotasjonsinvariant om z-aksen, og denne symmetrien impliserer bevaring av z-komponenten av dreieimpulsen. Altså er P_φ dreieimpulsen om z-aksen.

2e) At $H' = -mc^2/2$, gir at

$$\frac{{P_t}^2}{A} - \frac{(AP_\varphi - BP_t)^2}{A(AC+B^2)} - \frac{{P_r}^2}{D} = m^2c^2 \; .$$

Så lenge $A > 0$, gir det da direkte at ${P_t}^2 \geq Am^2c^2$.
I grensen $r \to \infty$ vil $A \to c^2$. For at partikkelen skal kunne bevege seg uendelig langt bort, må derfor ${P_t}^2 \geq m^2c^4$ (husk at P_t er en bevegelseskonstant).
I grensen $r \to \infty$ har vi dessuten at

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{CP_t + BP_\varphi}{m(AC+B^2)} \longrightarrow -\frac{P_t}{mc^2} \; .$$

Men bare $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau > 0$ gir fysisk mening, følgelig må også $P_t < 0$ i grensen $r \to \infty$. Altså må $P_t < -mc^2$ i denne grensen.

3a) Euler–Lagrange-ligningen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\rho}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\rho}}\right) = 0$$

blir som følger:

$$\frac{1}{2}\left[2\lambda_2\phi - 4\lambda_4\phi^3 - \frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\eta^{\rho\nu}\,\phi_{,\nu} + \eta^{\mu\rho}\,\phi_{,\mu}\right)\right] = 0 \; .$$

Den kan også skrives slik:

$$\eta^{\rho\nu}\,\phi_{,\nu\rho} - \lambda_2\phi + 2\lambda_4\phi^3 = 0 \; , \qquad (1)$$

eller slik:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi - \lambda_2\phi + 2\lambda_4\phi^3 = 0 \; .$$

Den mest åpenbare løsningen er ϕ identisk lik 0. Spørsmålet om denne løsningen er stabil eller ikke, er et spørsmål om hva som skjer etter hvert som tiden går dersom ϕ er litt forskjellig fra 0 ved ett tidspunkt. Det aller enkleste vi kan gjøre for å undersøke stabiliteten, er å anta at ϕ er konstant i rommet, slik at $\nabla^2\phi = 0$. Tidsavhengigheten til ϕ er da gitt av ligningen

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \lambda_2\phi + 2\lambda_4\phi^3 = 0 \; .$$

Så lenge ϕ er liten, kan vi se bort fra leddet med ϕ^3 i denne ligningen. Dermed står vi igjen med den lineariserte ligningen

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\lambda_2\phi = 0 \; ,$$

som har to eksponensielle løsninger $\phi = \phi_0\,\mathrm{e}^{\pm\sqrt{\lambda_2}\,ct}$. Ett eneste eksempel på en løsning som starter nær $\phi = 0$ og beveger seg bort derfra, f.eks. eksponensielt slik som (den tilnærmede) løsningen $\phi = \phi_0\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_2}\,ct}$, er nok til å vise at $\phi = 0$ er en ustabil løsning.

3b) Det som interesserer oss mest her, er energitettheten

$$
\begin{aligned}
T_{00} &= \eta_{0\rho}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\rho}}\,\phi_{,0} - \eta_{00}\,\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,0}}\,\phi_{,0} - \mathcal{L} = (\phi_{,0})^2 - \mathcal{L} \\
&= \frac{1}{2}\left((\phi_{,0})^2 + (\nabla\phi)^2 - \lambda_2\phi^2 + \lambda_4\phi^4\right) \; .
\end{aligned}
$$

Vi ser at både den tidsderiverte $\phi_{,0}$ og den romderiverte $\nabla\phi$ gir ikke-negative bidrag til energitettheten. For å minimalisere energitettheten antar vi derfor at ϕ er konstant, uavhengig av både tid og rom, det gir at

$$
T_{00} = \frac{1}{2}\left(-\lambda_2\phi^2 + \lambda_4\phi^4\right) \; .
$$

Men vi er ikke dermed ferdige med minimaliseringen. Hvis $\phi = 0$, så er $T_{00} = 0$, men dette er ikke den minste mulige verdien. For å finne minimum, setter vi

$$
\frac{\mathrm{d}T_{00}}{\mathrm{d}\phi} = -\lambda_2\phi + 2\lambda_4\phi^3 = 0 \; .
$$

I tillegg til $\phi = 0$, som altså ikke er et minimum, har vi to andre løsninger,

$$
\phi = \pm\sqrt{\frac{\lambda_2}{2\lambda_4}} \; ,
$$

som gir

$$
T_{00} = \frac{1}{2}\left(-\lambda_2\phi^2 + \lambda_4\phi^4\right) = -\frac{\lambda_2^2}{8\lambda_4} \; .
$$

Merk at her skal vi minimalisere energitettheten ikke som funksjon av tid og rom, men *i hvert punkt i tid og rom* som funksjon av feltet ϕ, som vi tar til å være konstant i tid og rom. Her har flere latt seg forvirre.

De to konstante feltkonfigurasjonene $\phi = \pm\sqrt{\lambda_2/(2\lambda_4)}$, som minimaliserer energitettheten, er faktisk løsninger av feltligningen. Det er selvsagt ingen tilfeldighet, men har sin dypere grunn, nemlig at ligningen $\mathrm{d}T_{00}/\mathrm{d}\phi = 0$, som bestemmer minimum av T_{00}, er identisk med Euler–Lagrange-ligningen (1) i det tilfellet at feltet er konstant i tid og rom. Når feltet er konstant i tid og rom, så er energi-impulstensoren $T_{\mu\nu}$ proporsjonal med metrikken $\eta_{\mu\nu}$, nemlig:

$$
T_{\mu\nu} = \eta_{\nu\rho}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\rho}}\,\phi_{,\mu} - \eta_{\mu\nu}\,\mathcal{L} = -\eta_{\mu\nu}\,\mathcal{L} \; .
$$

Når så den konstante feltverdien $\phi = \pm\sqrt{\lambda_2/(2\lambda_4)}$ er slik at $\mathcal{L} \neq 0$, nemlig

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\lambda_2\phi^2 - \lambda_4\phi^4\right) = \frac{\lambda_2^2}{8\lambda_4} \; ,
$$

så betyr det at bidraget $\kappa T_{\mu\nu} = -\kappa g_{\mu\nu}\,\mathcal{L}$ i Einsteins gravitasjonsligning

$$
G_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu}
$$

har nøyaktig samme form som bidraget $\Lambda g_{\mu\nu}$ fra den kosmologiske konstanten Λ.