NTNU
Fakultet for Naturvitenskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Eksamen i TFY 4270 Klassisk Feltteori

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Tlf: 73593131

Tirsdag 30. mai 2006
kl. 09.00-13.00

Tilletne hjelpemiddel:
Godkjend lommekalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

I alle oppgavene bruker vi naturlege einheiter, det vil seie $c = G = 1$. Metrikken er diag(-1,1,1,1). Oppgavesettet består av fire sider. Les oppgaveteksten nøye.

Oppgave 1

I denne oppgava skal vi studere ein observatør som bevegar seg i ein romleg dimensjon. Bevegelsen i labsystemet er gitt ved

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1+g^2t^2}} \,, \qquad t \geq 0 \,,$$

der g er ein konstant med dimensjon $(tid)^{-1}$.

a) Finn $x(t)$ når $x(0) = 0$.

b) Vis at

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{gt}{\sqrt{1+g^2t^2}} \ ,$$

Bruk dette til å finne eigentida τ som funksjon av t når $\tau(0) = 0$.

c) Finn 2-hastigheiten $\mathbf{u} = (\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau})$ som funksjon av eigentida τ.

d) Ei kjelde i ro i origo sender ut lyssignal med frekvens ω. Observatøren mottar lyssignalet. Kva er frekvensen ω^* på lyset som observatøren måler? Uttrykk svaret ved observatørens eigentid. Er dette lyset rød - eller blåforskyve?

Oppgave 2

I denne oppgava skal vi sjå på eit tidrom med følgjande metrikk

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{m}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \ ,$$

der m er ein konstant og (r, θ, ϕ) er kulekoordinatar.

a) Denne metrikken er tidsuavhengig og invariant under $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$, der ϕ_0 er ein konstant. Skriv opp dei tilhøyrande Killing vektorane og finn dei bevarte størrelsane.

b) Bruk resultata i a) til å finne Christoffelsymbola Γ^t_{tt} og Γ^t_{rt}. La P og Q vere to punkt i tidrommet med koordinatar $(t, r_1, \theta_1, \phi_1)$ og $(t, r_2, \theta_1, \phi_1)$. Anta at $r_1 > m$ og $r_2 > m$. Kva er den fysiske avstanden mellom desse punkta dersom ein måler langs r?

c) Vi innfører ein ny tidsskoordinat v:

$$t = v - (r - m) - 2m \ln\left|\frac{r}{m} - 1\right| + \frac{m^2}{r - m} \ .$$

Uttrykk metrikken ved hjelp av koordinatane v, r, θ og ϕ. Er $r = m$ ein fysisk singularitet?

d) Vi skal nå studere lysstrålar i denne metrikken. Finn alle dei radielle lyslike kurvene som er definert ved $ds^2 = 0$ og $d\theta = d\phi = 0$ og avgjer om dei beskriv innkommande eller utgåande lys. Beskriv metrikken i denne oppgava geometrien til eit svart hull?

Oppgave 3

Metrikken til eit homogent og isotropt univers er

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[d\chi^2 + \left\{\begin{array}{l}\sin^2\chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2\chi\end{array}\right\}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] , \quad \left\{\begin{array}{l}k=1 \\ k=0 \\ k=-1\end{array}\right\} ,$$

der k er den romlege krumninga. Friedmans likningar med ein kosmologisk konstant Λ for eit homogent og isotropt univers er

$$\begin{aligned} 3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= 8\pi\rho + \Lambda , \\ -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= 8\pi p - \Lambda . \end{aligned}$$

Her er ρ energitettheiten, p er trykket, og a er skalafaktoren. Vi skal nå begrense oss til å studere vakuum, det vil seie $\rho = p = 0$. Dette tidrommet kallast de Sitter universet.

a) Finn $a(t)$ når $a(0) = 1$ og $\dot{a}(0) = \sqrt{\Lambda/3}$. Finn Hubble konstanten H. Vis at $k = 0$.

b) Definer dei nye koordinatane r og $\tilde{t}$

$$\begin{aligned} r &= \chi e^{Ht} , \\ \tilde{t} &= t - \frac{1}{2}L\ln\left[L^2 - \chi^2 e^{2Ht}\right] , \end{aligned}$$

der $L = 1/H$. Finn metrikken i dei nye koordinatane.

c) Kva er den fysiske avstanden mellom $r = 0$ og $r = L$ når ein måler radielt? Kva er det tredimensjonale volumet mellom $r = 0$ og $r = L$?

d) Innfør koordinatane

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{L^2 - \chi^2}\sinh\frac{\tilde{t}}{L} , \\ v &= \sqrt{L^2 - \chi^2}\cosh\frac{\tilde{t}}{L} , \\ x &= \chi\sin\theta\cos\phi , \\ y &= \chi\sin\theta\sin\phi , \\ z &= \chi\cos\theta . \end{aligned}$$

Vis at de Sitter universet er ein fire-dimensjonal hyperboloide i eit fem-dimensjonalt rom.

Oppgave 4

Denne oppgava består av fire ulike spørsmål som ein kan svare på uavhengig av kvarandre.

a) Kor mange parametre har den homogene Lorentz-gruppa? Gje eit eksempel på ei ikkje-triviell undergruppe af den homogene Lorentz-gruppa.

b) Kva er ein syklisk koordinat? Bruk Lagrange likningar til å vise at ein syklisk koordinat gir ei bevaringslov for den konjugerte impulsen.

c) Lagrangetettheiten for Proca-feltet er gitt ved

$$\mathcal{L} \quad = \quad -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \, ,$$

der m er ein konstant som er forskjellig frå null. $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ er felttensoren. Er Lagrangetettheiten Lorentz-invariant? Gauge-invariant? Finn Euler-Lagrange likningane for Proca-feltet.

d) Vi ser på standardsituasjonen, der eit inertialsystem S' beveger seg langs x-aksen med hastigheit v i forhold til inertialsystemet S. Skriv ned transformasjonsformlane mellom koordinatane x, y, z og t i S og koordinatane x', y', z', og t' i S'. Bruk disse transformasjonane til å utlede formlen for lengdekontraksjon og relasjonen mellom eigentida τ og koordinattida t.

Oppgitt:

Geodetisk kurve:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \; .$$