Fasit Eksamen TFY 4270 Klassisk Feltteori Våren 2006

May 31, 2006

Oppgave 1

a) Integrasjon gir

$$x(t) \quad = \quad g^{-1}\sinh^{-1}(gt) + c \; ,$$

der c er ein integrasjonskonstant. Initialbetingelsen gir $c = 0$ som gir

$$\underline{\underline{x(t) = g^{-1}\sinh^{-1}(gt)}} \; .$$

b) Vi har

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - v^2} \; ,$$

der $v = dx/dt$. Uttrykket for $d\tau/dt$ finn ein ved å sette inn uttrykket for dx/dt som er gitt i oppgava. Integrasjon gir da

$$\tau(t) \quad = \quad g^{-1}\sqrt{1 + g^2t^2} + C \; ,$$

der C er ein integrasjonskonstant. $\tau(0) = 0$ gir $C = -1/g$ som gir

$$\underline{\underline{\tau(t) = g^{-1}\left(\sqrt{1 + g^2t^2} - 1\right)}} \; .$$

c) Resultatet i b) gir

$$t \quad = \quad \frac{1}{g}\sqrt{g^2\tau^2 + 2g\tau}$$

Derivasjon av dette uttrykket gir:

$$\frac{dt}{d\tau} \quad = \quad \frac{g\tau + 1}{\sqrt{g^2\tau^2 + 2g\tau}} \ .$$

Normalerisingskrav på $\mathbf{u}$ gir

$$\frac{dx}{d\tau} \quad = \quad \sqrt{-1 + \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2}$$

Vi må velge positiv løysing fordi $x(\tau)$ er ein voksande funksjon. Dette gir

$$\frac{dx}{d\tau} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{g^2\tau^2 + 2g\tau}} \ .$$

Altså:

$$\underline{\underline{\mathbf{u} = \left(\frac{g\tau + 1}{\sqrt{g^2\tau^2 + 2g\tau}}, \frac{1}{\sqrt{g^2\tau^2 + 2g\tau}}\right)}} \ .$$

d) Samanhengen mellom emittert frekvens of mottatt frekvens er

$$\begin{aligned} \omega^*(\tau) \quad &= \quad \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}\,\omega \\ &= \quad \underline{\underline{\sqrt{\frac{g\tau}{2+g\tau}}\,\omega}} \ . \end{aligned}$$

Lyset er raudforskyve som er naturleg fordi mottakaren beveger seg bort frå kjelda.

Oppgave 2

a) Killingvektorane er

$$\underline{\underline{\xi = (1,0,0,0)}} \ , \qquad \underline{\underline{\eta = (0,0,0,1)}} \ .$$

Bevarte størrelsar

$$\underline{\underline{e = -\xi \cdot \mathbf{u} = \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 \frac{dt}{d\tau}}} \ , \qquad \underline{\underline{l = \eta \cdot \mathbf{u} = r^2 \sin^2\theta \frac{d\phi}{d\tau}}}$$

b) Derivasjon med omsyn på eigentida τ gir

$$\frac{d^2t}{d\tau^2}\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 - \frac{2m}{r^2}\left(1 - \frac{m}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{d\tau} \quad = \quad 0 \ .$$

Frå denne likninga kan ein avlese Christoffelsymbola:

$$\underline{\underline{\Gamma^t_{tt} = 0}} \ , \qquad \underline{\underline{\Gamma^t_{rt} = -\frac{m}{r^2}\left(1 - \frac{m}{r}\right)^{-1}}} \ .$$

Fysisk avstand når ein måler radielt er

$$\underline{\underline{d = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{1 - \frac{m}{r}} = r_2 - r_1 + m \ln \frac{r_2 - m}{r_1 - m}}} \ .$$

(Sjekk: i tilfellet $m = 0$ er har tidrommet Minkowski metrikk og resultatet reduseres til det vi kjenner for Euklidske rom).

c) Differensialet blir etter litt rekning:

$$dt \quad = \quad dv - \frac{dr}{(1 - \frac{m}{r})^2} \ .$$

Substitusjon gir da flg. uttrykk for metrikken

$$\underline{\underline{ds^2 = -\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2}} \ .$$

Metrikken i dei nye koordinatane har ikkje singulariteitar, altså er $r = m$ ein koordinatsingulariteit.

d) Lysstrålar er definert ved lyslike kurver

$$ds^2 \quad = \quad 0 \ .$$

Ei mogleg løysing er

$$\underline{\underline{dv = 0 \Leftrightarrow v = \text{konst}}} \ .$$

Dette svarer til innkommande lys fordi

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dr} &= -\frac{1}{(1 - \frac{m}{r})^2} \\ &< 0 \ . \end{aligned}$$

Den andre moglege løysinga er

$$2dr - \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 dv = 0 \ .$$

Dette gir

$$\frac{dv}{dr} \quad = \quad \frac{2}{(1 - \frac{m}{r})^2} \ .$$

Løysinga til denne differensiallikninga er

$$\underline{\underline{v - 2(r - m) - 4m \ln \left| \frac{r}{m} - 1 \right| + \frac{2m^2}{(r - m)} = \text{konst}}} \ .$$

Dette tilsvarer utgåande lys fordi $dv/dr > 0$ for alle r, og v er ein tidlik koordinat for alle r.

d) Nei, dette er ikkje eit svart hull fordi t alltid er ein tidlik koordinat og r alltid er ein romlik koordinat.

Oppgave 3

a) Vi kombiner dei to likningane og får

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3}\Lambda \, .$$

Løysinga av denne differensiallikninga med $a(0) = 1$ og $\dot{a}(0) = \sqrt{\Lambda/3}$ er

$$\underline{\underline{a(t) = e^{\sqrt{\Lambda/3}t}}} \, .$$

Hubblekonstanten er

$$\underline{\underline{\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}} \, .$$

Innsetting av $a(t)$ i Friedmans likningar viser at dei er oppfylt berre når $k = 0$.

b) Differensiala er

$$\begin{aligned} dr &= d\chi e^{Ht} + \chi e^{Ht} H dt \, , \\ d\tilde{t} &= dt + \frac{L\chi d\chi + \chi^2 dt}{L^2 - \chi^2 e^{2Ht}} e^{2Ht} \, . \end{aligned}$$

Innsett i metrikken får vi

$$\underline{\underline{ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{L^2}\right) d\tilde{t}^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{L^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2)}} \, .$$

c) Avstanden er

$$\underline{\underline{d = \int_0^\pi \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2}}} = \frac{1}{2}\pi L}} \, .$$

Volumet er

$$\underline{\underline{V = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L \frac{dr \, r^2 \sin\theta}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2}}} = \pi L^3}} \, .$$

d) Koordinatane tilfredsstiller

$$\underline{\underline{-u^2 + v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = L^2}} \, .$$

Dette er ei likning for ein 4-dimensjonal hypeboloide i eit fem-dimensjonal rom.

Oppgave 4

a) Den homogene Lorentzgruppa har 6 parametre: 3 rotasjonsvinklar og boostar i x, y, og z-retning. Mengda som beståa av alle rotasjonar i rommet er ei ikkje-triviell undergruppe som har tre parametre. Mengda som består av alle boostar langs ein bestemt akse er ei anna undergruppe og har ein parameter.

b) Dersom Lagrangefunksjonen er uavhengig av ein koordinat x er den syklisk. Er dette tilfellet har vi

$$\frac{\partial L}{\partial x} \quad = \quad = 0 \; .$$

Lagrange likning gir da

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad = \quad = 0 \; .$$

Integrasjon gir

$$\underline{\underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C}} \; .$$

Venstresida er pr.definisjon lik den konjugerte impulsen p_x som er altså er konstant.

c) Lagrangetettheiten er Lorentz-invariant, men ikkje gauge invariant. Leddet $m^2 A_\mu A^\mu$ er invariant under globale men ikkje lokale fasetransformasjonar. Euler-Lagrange likningane for Proca-feltet er

$$\underline{\underline{\partial_\mu F^{\mu\nu} = m^2 A^\nu}} \; .$$

d) Transformasjonsformlane er

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - vx) \; , \\ x' &= \gamma(x - vt) \; , \\ y' &= y \; , \\ z' &= z \; , \end{aligned}$$

der $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$. Dersom ein måler lengda Δx til ein stav i ro i S ved samtidigheit ($\Delta t = 0$), får vi

$$\underline{\underline{\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma \Delta x}} \; .$$

Eigentida τ er den tida som ein måler på ei klokke som følger med partikkelen. I dette tilfellet er $\Delta\tau = \Delta t'$ og $\Delta x' = 0$.. Dette gir

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \gamma(\Delta t - v\Delta x) \\ \Delta x &= v\Delta t \; . \end{aligned}$$

Kombinerer ein dette, får vi

$$\underline{\underline{\Delta\tau = \gamma^{-1}\Delta t}} \; ,$$

som er uttrykket for tidsdilatasjon.