

# FORMLER I FAG TFY4115 FYSIKK

## ENDELIG VERSJON

Formelarkene følger som vedlegg til eksamensoppgavene i emnet.

NB! Både  $\mathbf{a}$  og  $\dot{\mathbf{a}}$  indikerer at størrelsen  $a$  er en vektor.

## KINEMATIKK

### Rettlinjet bevegelse

Akselerasjon: 
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{x}}$$

Hastighet: 
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{a} dt'$$

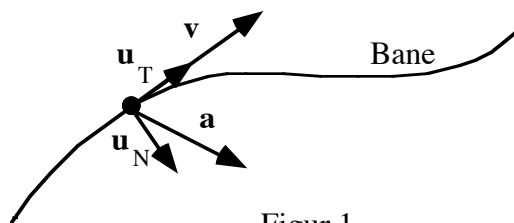
Veilengde: 
$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{v} dt'$$

### Uniformt akselerert, rettlinjet bevegelse, $\mathbf{a}=\text{konstant}$

Hastighet: 
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}(t - t_0)$$

Veilengde: 
$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t - t_0)^2$$

### Krumlinjet bevegelse:



Figur 1

Hastighet: 
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u}_T \frac{ds}{dt}$$

Akselerasjon: 
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N$$

Tangensialakselerasjon: 
$$\mathbf{a}_T = a_T \mathbf{u}_T = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_T$$

Normal-/sentripetalakselerasjon: 
$$\mathbf{a}_N = a_N \mathbf{u}_N = \frac{v^2}{r} \mathbf{u}_N \quad \text{der } r = \text{krumningsradius}$$

$\mathbf{u}_T$  og  $\mathbf{u}_N$  er enhetsvektorer i henholdsvis tangensial- og normalretning, som vist i fig. 1.

**Sirkelbevegelse, radius r:**

Vinkelhastighet:  $\dot{\varphi} = \frac{v}{r}$

Vinkelakselerasjon:  $\ddot{\varphi} = \frac{a_T}{r} = \frac{\dot{v}}{r}$

Hastighet:  $\mathbf{v} = \dot{\varphi} \mathbf{r}$

Akselerasjon:  $\mathbf{a} = \ddot{\varphi} \mathbf{r} = \dot{\varphi} \mathbf{v}$

**Uniform sirkelbevegelse,  $\dot{\varphi}$  = konstant**

Vinkel:  $\varphi = \varphi_0 + \dot{\varphi}(t - t_0)$

Periode:  $T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}}$

Frekvens:  $f = \frac{\dot{\varphi}}{2\pi}$

**Uniformt akselerert sirkelbevegelse,  $\ddot{\varphi}$  = konstant:**

Vinkel:  $\varphi = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}(t - t_0)^2$

Vinkelhastighet:  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + \ddot{\varphi}(t - t_0)$

**KREFTER, BEVEGELSESMENNGDE OG DREIEIMPULS****Massemiddelpunkt, betegnet CM**

Total masse for system av partikler:  $M = \sum_i m_i$

Massemiddelpunkt for system av partikler:  $\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$

Massemiddelpunkt for stivt legeme:  $\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_M \mathbf{r} \cdot dm$

**Tregghetsmoment** (Tabell for stive legemer på siste side)

For en partikkel med masse m om et punkt O i avstand r fra massen m:  $I = mr^2$

For system av partikler:  $I = \sum_i m_i r_i^2$

For stivt legeme:  $I = \int_M r^2 \cdot dm$

Tabellen over tregghetsmomenter på siste side er gitt med hensyn på en akse gjennom massemiddelpunktet CM. For en akse parallelt med akse gjennom massemiddelpunktet finnes tregghetsmomentet ved Steiners sats.

Steiners sats/ Parallellakse teoremet:  $I = I_{CM} + Mh^2$

der h er avstanden mellom de parallelle aksene.

**Bevegelsesmengde**

For en partikkel med masse  $m$ :  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

For system av partikler:  $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{CM}$

For stivt legeme:  $\mathbf{P} = \int_M \mathbf{v} \cdot dm = M\mathbf{v}_{CM}$

**Newton's 2. lov, impuls (kraftstøt)**

For en partikkel med masse  $m$ :  $\sum_i \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$

For konstant masse  $m$ :  $\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$

For system av partikler med konstant masse:

$$\mathbf{F}_{ext} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = M\mathbf{a}_{CM}$$

For stivt legeme (konstant masse):  $\mathbf{F}_{ext} = \sum_i \mathbf{F}_i = M\mathbf{a}_{CM}$

Impuls (kraftstøt), for en partikkel:  $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$

For et system av partikler finnes impulsen ved summering over alle partiklene. For stivt legeme gjelder formelen for impulsen når hastighetene refererer seg til CM og  $m$  er total masse for legemet.

Formlene ovenfor gjelder i et treghetsreferansesystem. Dersom koordinatsystemet har en akselerasjon  $\mathbf{a}_r$  relativt et treghetsreferansesystem er  $\mathbf{a}$  gitt ved  $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_r$ , der  $\mathbf{a}'$  er akselerasjonen relativt det akselererte koordinatsystemet.

**Newton's 3. lov**

Når et legeme A virker på et legeme B med en kraft, vil alltid B virke tilbake på A med en like stor og motsatt rettet kraft. Kraft = -Motkraft. Kraft og motkraft virker alltid på hvert sitt legeme.

**Gravitasjonsvekselvirkning**

To masser  $m$  og  $M$  i avstand  $\mathbf{r}$  fra hverandre (CM til CM) virker med gjensidig like store krefter på hverandre gitt ved:

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r} \quad \text{der } G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \text{ er gravitasjonskonstanten.}$$

**Friksjon**

Betegner  $N$ =normalkraft,  $F$ =friksjonskraft og  $\mu$ =friksjonskoeffisient.

Statisk friksjon:  $f_s \leq \mu_s N$

Kinetisk friksjon:  $f_k = \mu_k N$

**Fjærkraft**

Kraft fra fjær med fjærkonstant  $k$ :  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$  der  $\mathbf{r}$  er avstanden fra likevektsposisjonen

**Spinn og dreiemoment**

Dreiemoment om et punkt O:  $\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  der  $\sum \mathbf{r} = \sum_i \mathbf{r}_i$  når flere krefter virker.

Spinn for en partikkel med bevegelsesmengde  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  om et punkt O:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Spinnsatsen for en eller flere partikler om et punkt O:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{ext}} = \sum_i \dot{\mathbf{L}}_i = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{L}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

som gjelder når O er i ro i forhold til et treghetsreferansesystem.

For et stivt legeme som roterer om en akse, z-aksen, gjennom O:

$$L_z = I_z \dot{\phi}$$

Spinnsatsen for stivt legeme om z-aksen gjennom O:

$$\dot{L}_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \dot{\phi} = I_z \ddot{\phi}$$

Langs hovedtreghetsakser gjelder:  $\mathbf{L} = \mathbf{I} \dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{L}$$

Totalt spinn:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{orb}} + \mathbf{L}_{\text{int}}$$

der

$$\mathbf{L}_{\text{orb}} = \mathbf{r}_{\text{CM}} \times \mathbf{P} = \mathbf{r}_{\text{CM}} \times (M\mathbf{v}_{\text{CM}})$$

og

$$\frac{d\mathbf{L}_{\text{int}}}{dt} = \mathbf{I}_{\text{CM}} \dot{\phi}$$

$\mathbf{I}_{\text{CM}}$  er dreiemoment pga.  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  relativt CM.

### **Legeme i likevekt**

Translasjonslikevekt:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0$$

Rotasjonslikevekt:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$$

## **ARBEID OG ENERGI**

### **Kinetisk energi, $E_k$**

Partikkel med masse m:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

System av partikler:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Stivt legeme:

$$E_k = E_{k,\text{trans}} + E_{k,\text{rot}}$$

der

$$E_{k,\text{trans}} = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2$$

og

$$E_{k,\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \dot{\phi}^2$$

$I_{\text{CM}}$  er treghetsmomentet om rotasjonsaksen gjennom CM.

Rotasjon om fast akse, z-aksen:  $E_{k,rot} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$

### Arbeid, W

Arbeid utført på et legeme av resultantkraften  $\mathbf{F}$  fra pkt. A til B:

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Arbeidssetningen:

$$W_{AB} = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A}$$

For stivt legeme:

$$W_{AB} = W_{AB}^{trans} + W_{AB}^{rot}$$

der translasjonsarbeidet:  $W_{AB}^{trans} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_{CM} = \Delta E_{k,trans}$

og rotasjonsarbeidet:  $W_{AB}^{rot} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \tau_{CM} \cdot d\phi = \Delta E_{k,rot}$

Effekt i translasjonsbevegelse:  $P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

Effekt i rotasjonsbevegelse:  $P = \dot{\phi} \cdot \tau$

### Konservative krefter

Konservativ kraft:  $\mathbf{F} = - \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right]$  der U er potensiell energi.

Arbeid utført av konservativ kraft:  $W_{AB} = -\Delta U = U_A - U_B$

Total mekanisk energi:  $E = E_k + U$

Lov om konservering av total mekanisk energi,  $E = \text{konstant}$ ,  $\Delta E = 0$ :

$$E_A = E_B = E_{k,A} + U_A = E_{k,B} + U_B$$

### Potensiell energi, U

I tyngdefeltet:  $U = mgy$  der  $\mathbf{g}$  peker i negativ y-retning.

Potensiell energi for fjær med fjærkonstant k:  $U = \frac{1}{2} kr^2$

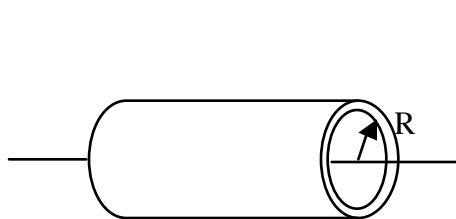
der r er målt fra likevektsposisjonen.

### Kombinasjon av konservative og ikke-konservative krefter

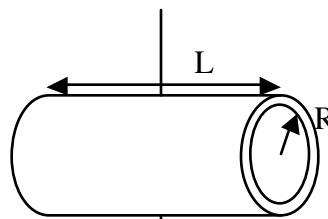
Arbeid utført av ikke-konservativ kraft:  $W' = \Delta(E_k + U)$

## TABELL OVER TREGHETSMOMENTER

Alle legemene er homogene og har masse  $M$ . Velger  $z$ -aksen som rotasjonsaksen som går gjennom massemidtpunktet til legemene. Tregghetsmomentet om  $z$ -aksen kalles i dette tilfellet  $I_{CM}$  der  $I_{CM}=I_z$ .



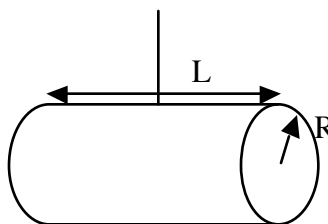
$$I = MR^2$$



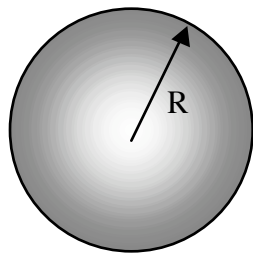
$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$



$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

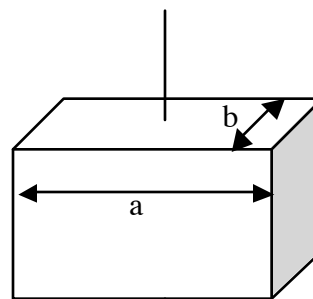


$$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$



For ei massiv kule:  $I = \frac{2}{5}MR^2$

For et kuleskall:  $I = \frac{2}{3}MR^2$



$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$



$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

## SVINGNINGER

### Enkel harmonisk, udempet, fri svingning

Svingelikning for udempet, fri svingning i 1 dimensjon:  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

For masse-fjær systemet:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

For matematisk pendel ved små utslag  $\varphi$  ( $x \ll L$ ):  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$   
der  $L$  = lengden av pendelen og  $g$  = tyngdens akselerasjon.

For fysisk pendel ved små utslag  $\varphi$  ( $x \ll D$ ):  $\omega_0 = \sqrt{\frac{MgD}{I}}$

der  $D$  = avstanden fra rotasjonsaksen til CM,  $M$  = pendelens masse og  $I$  = pendelens treghetsmoment om rotasjonsaksen.

Løsning av svingelikningen:  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$   
der  $A$ =amplituden og  $\varphi$ =faseforskyvningen.

Perioden:  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Frekvensen:  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

### Dempet, harmonisk, fri svingning

Svingelikning for dempet, harmonisk, fri svingning:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Innfører :  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  og  $\gamma = \frac{b}{2m}$

1. Underdempning,  $\gamma < \omega_0$ , med løsning:

$$x(t) = Ae^{\gamma t} \cos(\omega' t + \varphi)$$

der

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

2. Kritisk dempning,  $\gamma = \omega_0$ , med løsning:

$$x(t) = (A + Bt)e^{\gamma t}$$

3. Overdempning,  $\gamma > \omega_0$ , med løsning:

$$x(t) = Ae^{\omega_0(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Be^{\omega_0(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$$

### Tvungne svingninger

Svingelikning for tvungne svingninger:  $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$

Generell løsning:  $x(t) = x_{\text{hom}} + x_{\text{spes}}$

Valgt, spesiell løsning:

$$x_{\text{spes}} = A \cos(\omega t - \phi)$$

med

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

og

$$\tan(\phi) = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

## FLUIDMEKANIKK

### Fluidstatikk

Statisk trykk som funksjon av dybde h:  $P = P_0 + \rho gh$

der  $P_0$  = trykket ved overflata,  $\rho$  = tettheten til væsken og  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  = tyngdens akselerasjon.

### Fluiddynamikk

Kontinuitetslikningen for en kompressibel væske med tetthet  $\rho$ , hastighet  $v$  og areal  $A$ :

$$I_m = \frac{dm}{dt} = \rho v A = \text{konst.}$$

Kontinuitetslikningen for en inkompressibel væske:  $I_v = \frac{dV}{dt} = vA = \text{konst.}$

Bernoullis likning:  $P + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konst.}$  for strømning langs en strømningslinje.

Poiseuilles lov for trykkfallet ved laminær strømning i et rør med radius  $r$  og lengde  $L$ :

$$\Delta P = \frac{8\rho L}{r^4} I_v$$

## TERMODYNAMIKK

### Kinetisk gass teori

Ideell gass lov:

$$PV = nRT = NkT$$

der  $n$  = antall mol av gassen med trykk  $P$ , absolutt temperatur  $T$  og volum  $V$ .

$R = 8.314 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$  = universell gasskonstant.  $N$  = antall molekyler.  $k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  = Boltzmanns konstant.

Ekvipartisjonsprinsippet:  $E_{\text{av}} = \frac{1}{2} kT$  pr. frihetsgrad pr. molekyl

Maxwell-Boltzmanns hastighetsfordelingsfunksjon for molekyler med masse  $m$ :

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$



Maxwell-Boltzmanns energifordelingsfunksjon:  $F(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{kT} \right)^{3/2} E^{1/2} e^{-E/kT}$

Middelkvadrathastigheten:  $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle_{\text{av}}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$  der  $M = \text{molar masse} = m/n$

Midlere molekylhastighet:  $\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

Mest sannsynlig hastighet:  $v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$

Midlere fri veilengde:  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n_v d}$

der  $n_v = N/V$  er antall molekyl pr. volumenhet og  $d = \text{diameteren til molekylene}$ .

### Varme

Varmekapasitet for tilført varme  $Q$ :  $C = \frac{Q}{\Delta T}$

Varmekapasitet ved konstant volum:  $C_V = \frac{Q_V}{\Delta T} = \frac{dU}{dT}$  der  $U = \text{indre energi}$

Varmekapasitet ved konstant trykk:  $C_p = \frac{Q_p}{\Delta T}$

For en ideell gass:  $C_p = C_V + nR$

For ideell monoatomisk gass:  $C_V = \frac{3}{2} nR$

Spesifikk varmekapasitet:  $c = C/m$ ; Molar spesifikk varmekapasitet:  $c' = C/n$

Smeltevarme for materiale med spesifikk smeltevarme  $L_f$ :  $Q_f = mL_f$

Fordampningsvarme for materiale med spesifikk fordampningsvarme  $L_v$ :  $Q_v = mL_v$

### Termodynamikkens 1. lov

Netto varme  $Q$  tilført et system går til økning av indre energi  $U$  og arbeid utført av systemet  $W$ :

$$Q = \Delta U + W$$

Indre energi for en ideell gass:  $U = \frac{f}{2} nRT$  der  $f = \text{antall frihetsgrader}$

For adiabatisk, ideell gass:  $TV^{\gamma} = \text{konst.}$  eller  $PV^{\gamma} = \text{konst.}$  der  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$

Arbeid  $W$  utført av en gass i en kvasistatisk prosess:  $W = \int P \cdot dV$

### Termodynamikkens 2. lov

Ingen prosess er mulig der det eneste resultat er at varme avgis fra et varmereservoar og omsettes helt til arbeid.

Ingen prosess er mulig der det eneste resultat er at en varmemengde avgis fra ett varmereservoar og absorberes av et annet med høyere temperatur.

Ingen syklisk virkende varmekraftmaskin som arbeider mellom to gitte temperaturer kan ha større virkningsgrad enn Carnotmaskinen.

Virkningsgrad for en maskin som tilfører varme  $Q_h$  fra et varmt reservoir, utfører arbeidet  $W$  og overfører varmen  $|Q_c|$  til et kaldt reservoir:

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h}$$

Virkningsgrad for Carnotsyklusen:  $\eta = 1 - \frac{T_c}{T_h}$

Effektfaktor for en kjølemaskin/varmepumpe som tilfører varme  $Q_c$  fra et kaldt reservoir, utfører arbeidet  $W$  på systemet og overfører varmen  $|Q_h|$  til et varmt reservoir:

For en kjølemaskin:  $\text{COP} = \frac{|Q_c|}{W}$

For ei varmepumpe:  $\text{COP} = \frac{|Q_h|}{W}$

### **Entropi**

Endring i entropi i en reversibel prosess der  $dQ_{\text{rev}}$  er tilført varme i den reversible prosessen som forbinder tilstandene:

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}$$