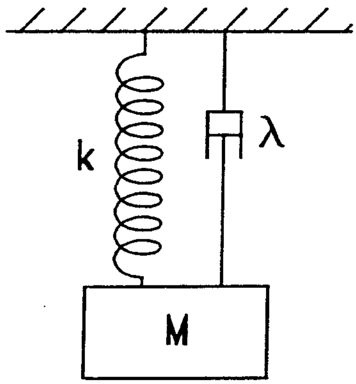
Oppgave 3



Figur 4

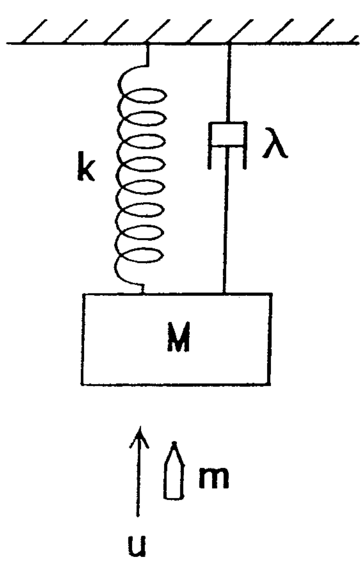
a) En masse $M = 5{,}0$ kg er festet til en fjær med fjærkonstant $k = 12{,}5$ kN/m. Systemet dempes med et dempeledd med motstandskoeffisient $\lambda = 1{,}0$ Ns/m. Oppsettet er vist i figur 4. Massen settes i bevegelse ved at den forskyves fra likevektsposisjonen $x = 0$ til $x_0 = 0.020$ m og samtidig gis en utgangshastighet $v_0 = 1{,}0$ m/s i positiv x-retning.

i. Still opp differensiallikningen for systemet ved hjelp av Newtons 2. lov.

En mulig løsning av differensiallikningen er:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)$$

ii. Finn konstantene A, γ, ω og α i løsningen av differensiallikningen.



Figur 5

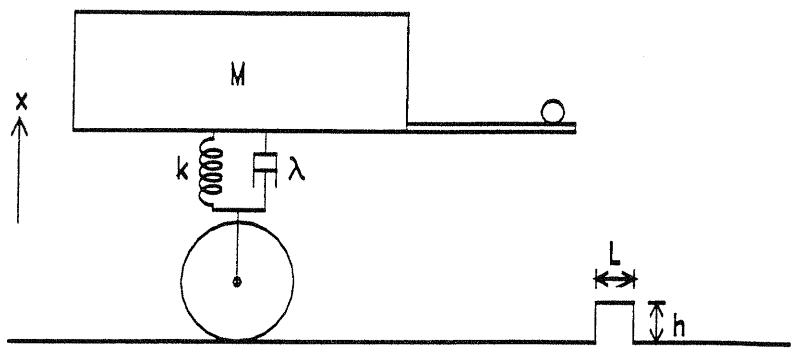
b) Det samme svingesystemet settes nå i svingninger ved at et prosjektil med masse $m = 0.010$ kg skytes inn i massen M og blir sittende fast, se figur 5. Prosjektilets hastighet før støtet er $u = 500$ m/s. Vi ser bort fra den lille nullpunktsforskyvningen systemet får etter at prosjektilet er skutt inn.

i. Hva blir nå startbetingelsene for svinge-bevegelsen?

ii. Vis at bevegelsen til felleslegemet etter støtet er gitt ved:

$$x(t) = \frac{m}{m+M} \cdot \frac{u}{\omega}\, e^{-\gamma t}\sin(\omega t)$$

iii. Hva må motstandskoeffisienten λ være for at svingingen skal være kritisk dempet? Skisser svingeforløpet i dette tilfellet.



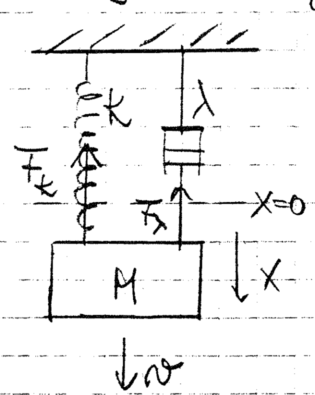
Figur 6

c) En tilhenger med masse M = 600 kg er opphengt, som vist i figur 6, i en fjær med fjærkonstant $k = 1.0 \cdot 10^5$ N/m og en støtfanger med motstandskoeffisient $\lambda = 8{,}0 \cdot 10^3$ Ns/m. Vi ser bort fra massen til hjulet og opphenget. Hjulet antas å være stivt. Tilhengeren beveger seg bortover en horisontal vei med hastighet v = 50 km/time. Ved tiden t = 0 møter tilhengeren en skarp hump med høyde h og lengde L i veibanen. Vi ser bort fra den tiden det tar for tilhengeren å klatre opp på og ned fra humpen. Vi antar at $L/v \ll T$ der T er systemets svingeperiode, og vi ser bort fra dempingen mens tilhengeren passerer humpen. Med disse antagelsene er tilhengerens akselerasjon $a = \dfrac{kh}{M}$ så lenge tilhengeren er oppå humpen.

i. Finn uttrykket for utsvinget x(t) i tilhengerens svingebevegelse etter humpen.

ii. Beregn maksimalt utsving fra likevektsposisjonen som tilhengeren får, når h = 10 cm og L = 10 cm.

<u>Oppgave 3</u>



a) Tyngdekraften tar vi ikke hensyn til da likevektsposisjonen svarer til

$$F_k^0 = Mg \quad (\text{Total } F \text{ pga. fjær } F_k + F_k^0)$$

i. Newtons 2. lov:

$$\sum F_y = Ma = M\ddot{x}$$

$$\Rightarrow M\ddot{x} = -F_k - F_\lambda = -kx - \lambda v$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\ddot{x} + \frac{\lambda}{M}\dot{x} + \frac{k}{M}x = 0}}$$

ii. Løsning $x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)$

$$\underline{\omega_0} = \sqrt{\frac{12{,}5\,kN/m}{5{,}0\,kg}} = \underline{50\,s^{-1}}$$

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{\lambda}{2M} = \frac{1{,}0}{2 \cdot 5{,}0}\,s^{-1} = \underline{\underline{0{,}10\,s^{-1}}}$$

$$\underline{\underline{\omega}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \simeq \omega_0 = \underline{\underline{50\,s^{-1}}}$$

Startbetingelser:

$t = 0 \quad x = x_0 \quad ; \quad v = v_0$

$t = 0 \Rightarrow \underline{x_0 = A\cos\alpha} \qquad (1)$

$$\dot{x} = -A\gamma e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha) - A\omega e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha)$$

$t = 0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 = A(-\gamma\cos\alpha - \omega\sin\alpha) \qquad (2)$

$(2)/(1) \Rightarrow \frac{v_0}{x_0} = -\gamma - \omega\tan\alpha$

$$\tan\alpha = -\frac{\frac{v_0}{x_0} + \gamma}{\omega} = -\frac{\frac{1}{0{,}020} + 0{,}10}{50}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha}} = -45{,}06^\circ \simeq \underline{\underline{-45^\circ}}$$

Fra (1): $\underline{\underline{A_0}} = \frac{x_0}{\cos\alpha} = \frac{0{,}020\,m}{0{,}7064} = \underline{\underline{0{,}028\,m}}$

b) i. Bevaring av bevegelsesmengde:

$mu = (m+M)\,V \qquad \cdot V$ = hastighet til fellesleget rett etter støtet

$$V = \frac{mu}{M+m} = \frac{0{,}010}{5{,}0+0{,}010}(500\,m/s)$$

$$V = 0{,}998\,m/s \simeq 1{,}0\,m/s$$

Startbetingelsene er nå:

Ved $t = 0 \quad \underline{x = x_0 = 0}$

$$\underline{\underline{v(t=0) = v_0 = V = 1{,}0\,m/s}}$$

ii. Fra a) $\tan\alpha = \div\infty \Rightarrow \alpha = \div\pi/2$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t \div \pi/2) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t)$$

$$t=0: \quad v_0 = V = A\omega \Rightarrow A = \frac{V}{\omega} = \frac{mu}{M+m}\cdot\frac{1}{\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = \frac{m}{m+M}\cdot\frac{u}{\omega}e^{-\gamma t}\sin(\omega t)}}$$

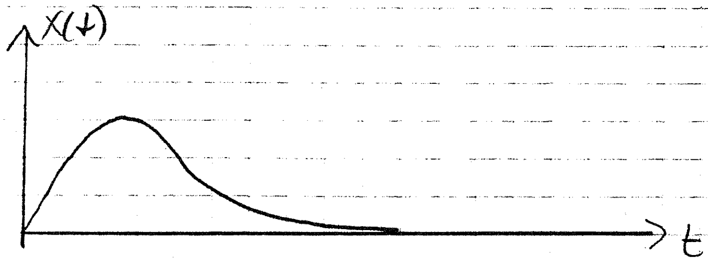
[Velges $u = \div 500\,m/s \rightarrow x(t) = \div\frac{m}{m+M}\frac{u}{\omega}e^{-\gamma t}\sin(\omega t)$]

iii. Kritisk dempning: $\gamma = \omega_0 = \frac{\lambda}{2(M+m)}$

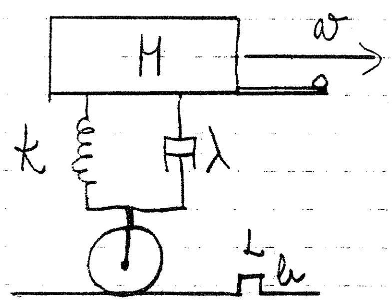
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m+M}} \simeq 50\,s^{-1}$$

$$\Rightarrow \lambda = 2(M+m)\omega_0 = 2(5{,}0 + 0{,}010)\cdot 50\ kg/s$$

$$\underline{\underline{\lambda = 500\ Ns/m}}$$



c)



i. Vertikal hastighet umiddelbart etter at humpen er passert:

$$v_V = a\Delta t = \frac{kh}{M}\cdot\frac{L}{v}$$

Svingebevegelsen er som i b) med starthastighet $v(t=0) = v_V$ og $x(t=0) = x_0 = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = \frac{khL}{Mv\omega}\cdot e^{-\gamma t}\sin(\omega t)}}$$

8

ii. Maksimalt utslag er første og største utslag, som finnes ved derivasjon.

$$\dot{x} = -A\gamma e^{-\gamma t}\sin(\omega t) + A\omega e^{-\gamma t}\cos(\omega t)$$

I maks $\dot{x} = 0 \Rightarrow \tan \omega t_0 = \dfrac{\omega}{\gamma}$ (3)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{10^5}{600}}\, s^{-1} = 12{,}9\, s^{-1}$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{2M} = \frac{8\cdot 10^3}{2\cdot 600}\, s^{-1} = 6{,}67\, s^{-1}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 11{,}04\, s^{-1}$$

Inn i (3): $\tan \omega t_0 = 1{,}66$

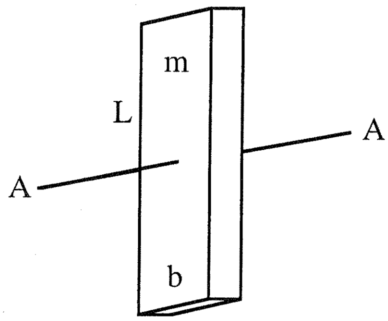
$\omega t_0 = 1{,}028$ rad $(58{,}9°)$

$t_0 = 0{,}093\, s$

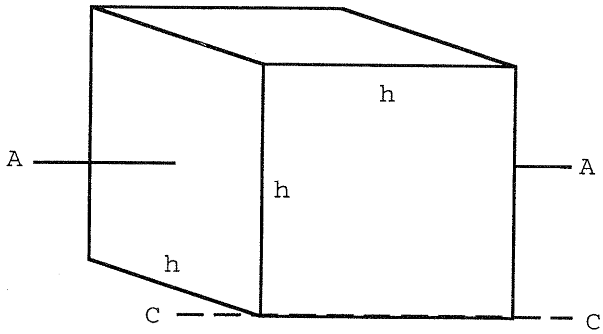
$$A = \frac{khL}{Mv\cdot\omega} = \frac{1\cdot 10^5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1}{600\cdot \frac{50\cdot 10^3}{3600}\cdot 11{,}04}\, m = 0{,}011\, m$$

Maks utslag $\underline{\underline{x(t_0)}} = 0{,}011\, m\, e^{-6{,}67\cdot 0{,}093} \sin(11{,}04\cdot 0{,}093) = \underline{\underline{0{,}0051\, m}}$

Oppgave 1



Figur 1



Figur 2

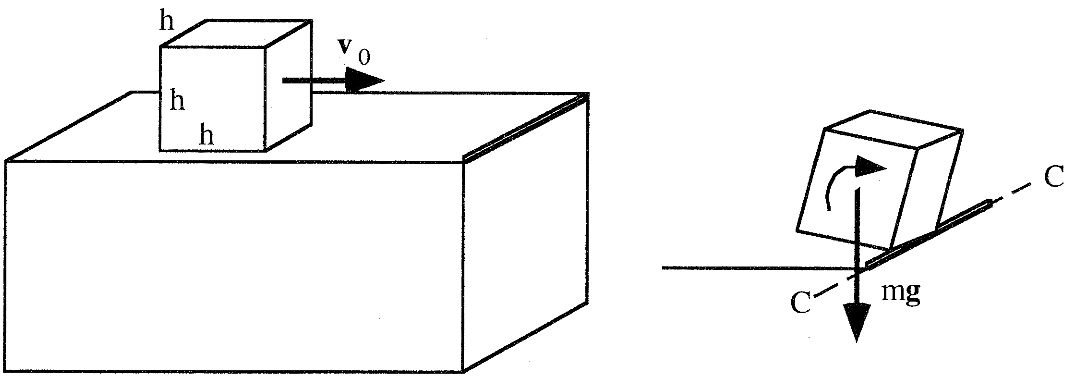
a) En stav med rektangulært tverrsnitt, lengde L og bredde b, har treghetsmoment om aksen A-A gjennom massemiddelpunktet (se fig. 1) gitt ved:

$$I = m\frac{b^2 + L^2}{12}$$

(I er uavhengig av tykkelsen, men avhenger av massen m.)

Bruk dette uttrykket til å finne treghetsmomentet for en terning, med sidekant h, om en akse A-A gjennom massemiddelpunktet og vinkelrett på to av sideflatene, som vist i fig. 2.

Finn deretter treghetsmomentet om en akse som faller sammen med sidekanten C-C.



Figur 3

b) Klossen glir friksjonsfritt på et bord med konstant hastighet $\mathbf{v}_0$. Idet den når bordkanten, blir den stoppet av en liten forhøyning som forårsaker et uelatisk støt. Forhøyningen er så liten at kreftene som stopper klossen ikke gir noe dreiemoment på klossen om aksen C-C. Situasjonen er illustrert i fig. 3.

Hvor stor må hastigheten v_0 være for at klossen akkurat skal "tippe over" og falle ned fra bordet?

c) Anta nå at det er friksjon mellom klossen og bordet, gitt ved en friksjonskoeffisient μ_k. Når klossen glir bortover, vil hastigheten derfor avta, dvs. friksjonskraften må ha en horisontal komponent. Denne komponenten gir et dreiemoment om aksen A-A gjennom CM.

Forklar kort hvordan det er mulig at klossen likevel ikke roterer om aksen A-A idet den glir bortover bordet.

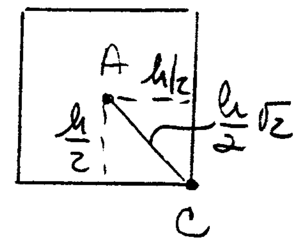
Oppgave 1

a) For terning: $b = L = h$

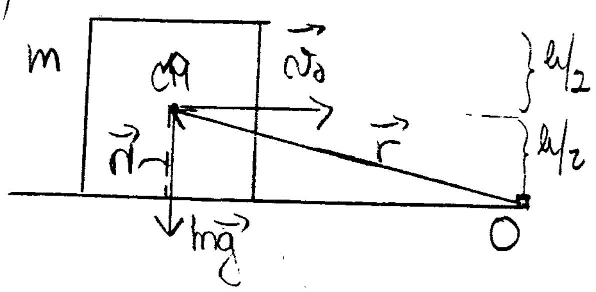
$$\Rightarrow \underline{\underline{I}} = m\frac{b^2+L^2}{12} = m\frac{h^2+h^2}{12} = \underline{\underline{\frac{m h^2}{6}}} \quad \text{(akse A-A)}$$

For akse C-C

$$\underline{\underline{I_{C-C}}} = \frac{mh^2}{6} + m\left(\frac{h\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}mh^2}} \quad \text{(Steiners teorem)}$$



b)



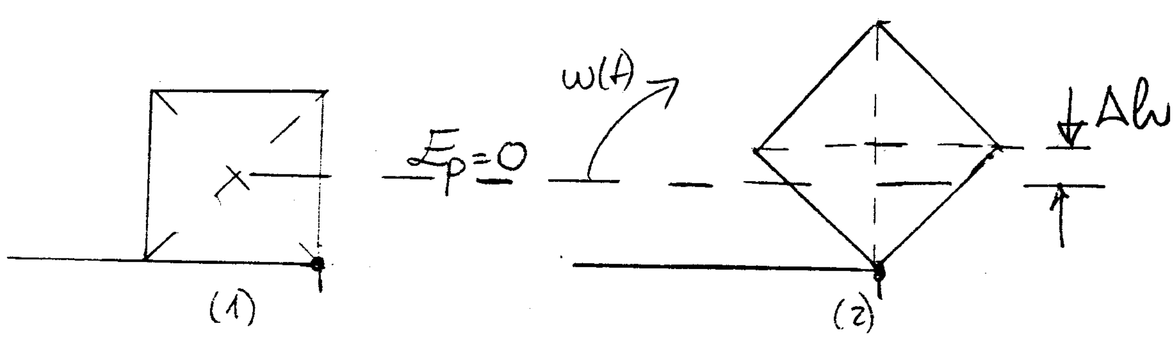
Velger O ved kanten av bordet som ref. punkt for dreieimpuls

Dreieimpulsen bevart om O $(\vec{\tau}_0 = 0)$

For støtet: $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L_0 = m v_0 \cdot \frac{h}{2}$

Umiddelbart etter støtet: $L_0 = I_{C-C} \cdot \omega_0 \Rightarrow m v_0 \frac{h}{2} = \frac{2}{3} m h^2 \omega_0$

$$\Rightarrow \underline{\omega_0 = \frac{3}{4}\frac{v_0}{h}} \quad (1)$$



Energibevarelse i rotasjonsbevegelsen. $E_k + E_p = \text{konst.}$

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

$$\frac{1}{2} I_{cc} \cdot \omega_0^2 + 0 = 0 + mg\Delta h \quad (2) \text{ (akkurat til pos (2))}$$

Av figur: $\underline{\Delta h = \frac{\sqrt{2}}{2}h - \frac{h}{2} = \frac{h}{2}(\sqrt{2}-1)}$ (3)

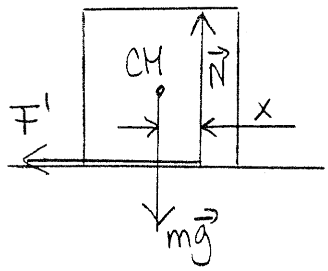
①, ② og ③ ⇒

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}m\,l^2\left(\frac{3}{4}\frac{v_0}{l}\right)^2 = mg\cdot\frac{l}{2}(\sqrt{2}-1)$$

$$\frac{3}{8}\frac{v_0^2}{l} = g(\sqrt{2}-1)$$

$$\underline{\underline{v_0 = \sqrt{\frac{8}{3}gl(\sqrt{2}-1)}}}$$ (eller større)

c)

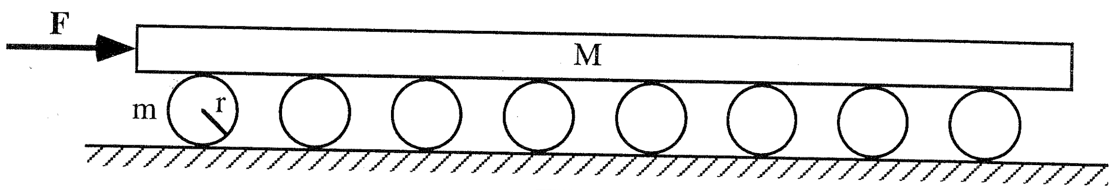


$m\vec{g}$ gir ikke dreiemoment om CM.
Friksjonskraften F' gir dreiemoment om CM.
For å motvirke dette dreiemomentet må resulterende normalkraft ($\vec{N}$) fra underlaget angripe foran CM og gi et dreiemoment som motvirker dreiemomentet pga. friksjonen
⇒ Klossen presses ned foran. ($\Sigma\vec{\tau}=0$)

Om CM: $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow F'\cdot\frac{l}{2} = Nx$ ⇒ Ingen rotasjon.

$N = mg \Rightarrow mgx = \mu_k mg\frac{l}{2}$ for at rotasjon skal unngås.

Oppgave 3 (Tidligere eksamensoppgave)



Figur 5

Ei plate med masse M skal forflyttes ved hjelp av 8 sirkulære ruller med radius r og masse m, som vist i fig. 5. En gitt kraft **F** virker på plata. Det er ren rulling mellom plate og ruller og mellom ruller og underlag.

a) Påvis at friksjonskreftene er de samme for alle rullene.

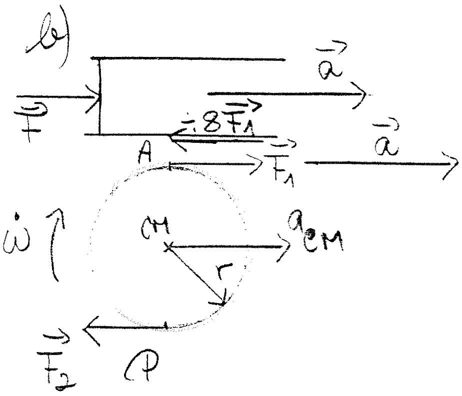
b) Bestem akselerasjonen til plata og rullenes massemiddelpunkt. Bestem friksjonskraften mellom en rull og plata og mellom rullen og underlaget.

c) Anta at friksjonen mellom rullene og underlaget er null, mens det fortsatt er er en ren rullebevegelse mellom plate og ruller. Finn tangensialakselerasjonen til rullenes kontaktpunkt med underlaget.

Oppgave 3

a) Rullene er like og bevegelsen er bestemt av akselerasjonen til plata. Rullene får samme bevegelse ⇒ Friksjonskreftene mellom plate og rull og mellom rull og underlag må være de samme for alle rullene. (Er også like, ② og ③).

b)



Newtons 2. lov på plata:

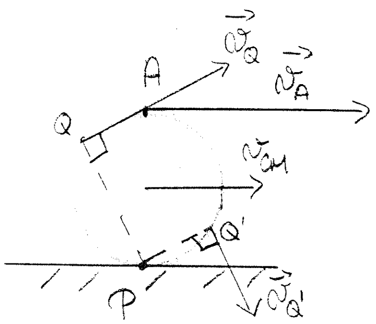
$$\sum \vec{F} = F - 8F_1 = Ma \qquad (1)$$

Newtons 2. lov på en rull

$$F_1 - F_2 = ma_{CM} \qquad (2)$$

Dreiemoment om CM (pos. retn. med klokka):

$$(F_1 + F_2)r = \tfrac{1}{2}mr^2\dot{\omega} \qquad (3)$$



For en rullende sylinder gjelder:

Når sylinderen har rotert en vinkel θ har CM forflyttet seg $s = r\theta$

$$\Rightarrow v_{CM} = \frac{ds}{dt} = r\dot{\theta} = r\omega \; ; \; a_{CM} = r\alpha$$

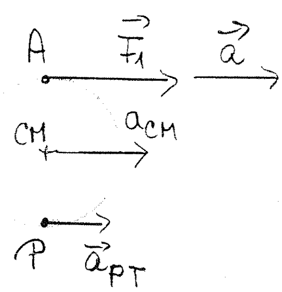
Alle pkt. på periferien har en tangensiell hastighet $v_T = \omega r$ om CM $\Rightarrow$ $v_A = v_{CM} + v_T = 2\omega r$ og $v_P = v_{CM} - v_T = 0$

For rullene: $a_{CM} = \dot{\omega} r = \alpha r \; (4) \; ; \; a = a_A = 2\dot{\omega} r \qquad (5)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{F}{3m + M} = 2a_{CM}}} \; ; \; \underline{\underline{F_1 = \frac{3ma}{8}}} \; ; \; \underline{\underline{F_2 = -\frac{ma}{8}}}$$

(Rettet motsatt av valgt retn.)

c)



Fra (2): $F_1 = ma_{CM} \qquad (6)$

Fra (3): $F_1 r = \frac{1}{2}mr^2\dot{\omega} \qquad (7)$

Hastigheten til pkt. A:

$$v_A = v_{CM} + v_T = v_{CM} + \omega r$$

$$\Rightarrow a = a_A = a_{CM} + \dot{\omega} r \qquad (8)$$

$v_P = v_{CM} - v_T = v_{CM} - \omega r \Rightarrow a_{PT} = a_{CM} - \dot{\omega} r$ (9)

Lign. (1), (6) – (9) $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{a = 3a_{CM} = \frac{3F}{3M+8m}}} \; ; \; \underline{\underline{a_{PT} = -a_{CM} = -\frac{F}{3M+8m}}}$$

Oppgave 1

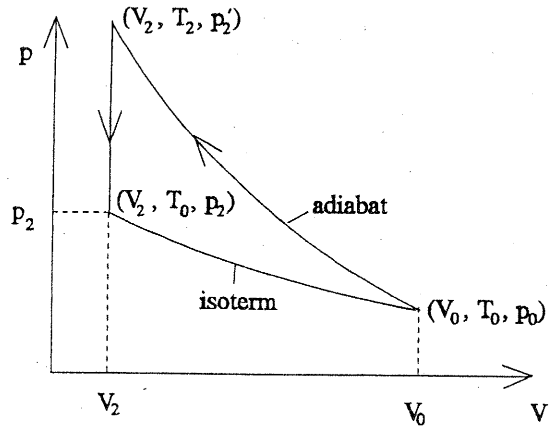


Fig. 1

En luftkompressor skal komprimere luft med trykk $p_0 = 1$ atm. og temp. $T_0 = 293$ K. Den skal levere lufta ved samme temp., T_0, trykk $p_2 = 20$ atm. og volumet $V_2 = 0{,}25$ m^3. Vi regner lufta som en ideell 2-atomig gass.

a) Første forsøk gjøres ved å komprimere lufta adiabatisk fra volum V_0 til volum V_2. Temperaturen vil da øke til T_2. Deretter senkes temperaturen til T_0 i en isochor prosess, se fig. 1. Hva er startvolumet V_0? Hva er temperaturen T_2?

For at lufta ikke skal få for høy temperatur etter kompresjonen, utfører vi nå en kompresjon i 2 trinn. Kompresjonen foregår først adiabatisk til volumet V_1 og temperatur T_1. Se fig. 2. Deretter føres lufta til en mellombeholder og avkjøles under konstant volum til utgangstemperaturen, T_0, før den komprimeres adiabatisk til volumet V_2 og temperaturen T_3.

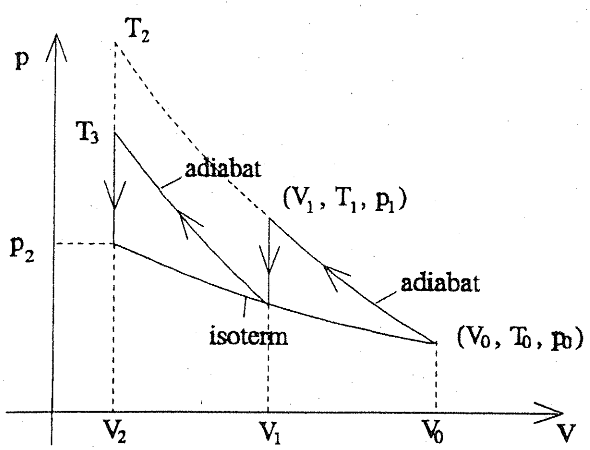


Fig. 2

b) Hvordan må volumet V_1 velges for at temperaturstigningen skal være den samme i begge kompresjonstrinn? Hva er nå høyeste temperatur, T_1?

c) Hvor mye arbeid tilføres under prosessene i pkt. a og b?

d) Hvor mye arbeid må tilføres hvis en kunne la hele kompresjonen gå langs en isoterm?

14

Oppgave 1

a) $p_0 V_0 = p_2 V_2$

$\Leftrightarrow V_0 = \frac{p_2 V_2}{p_0} \Leftrightarrow \underline{V_0} = \frac{20\,\text{atm} \cdot 0{,}25\,m^2}{1\,\text{atm}} = \underline{\underline{5{,}0\,m^3}}$

$T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$

$\Leftrightarrow T_2 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow \underline{T_2} = 293\,K \left[\frac{5{,}00}{0{,}25}\right]^{0{,}4} = \underline{\underline{971\,K}}$

b) Adiabat fra V_0 til V_1:

$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$ (1)

Adiabat fra V_1 til V_2:

$T_0 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1}$ (2)

$T_3 = T_1$. Dividerer: $\frac{(1)}{(2)}$:

$\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow \frac{V_0}{V_1} = \frac{V_1}{V_2}$

$\Leftrightarrow V_1 = \sqrt{V_0 \cdot V_2} = \sqrt{5{,}0 \cdot 0{,}25}\; m^3 \Leftrightarrow \underline{\underline{V_1 = 1{,}12\,m^3}}$

$T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 293\,K \left(\frac{5{,}0}{1{,}12}\right)^{0{,}4} \Leftrightarrow \underline{\underline{T_1 = 533\,K}}$

c) $W = \int p(V)\,dV$

$W_a = -\Delta U_a = -n\,C_v\,(T_2 - T_0)$

$\Leftrightarrow W_a = -n \frac{5}{2} R\,(T_2 - T_0)$

Start: $\frac{p_0 V_0}{T_0} = n \cdot R$ innsatt:

$W_a = -\frac{5}{2}\left(\frac{p_0 V_0}{T_0}\right)(T_2 - T_0)$

innsatt: $W_a = -\frac{5}{2}\left(\frac{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 5{,}0}{293}\right)(971 - 293)\,J$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{W_a}} = -4{,}32 \cdot 10^3 \cdot (971 - 293)\,J = \underline{\underline{-2{,}93 \cdot 10^6\,J}}$

$$W_b = -\Delta U = -nC_V\left[(T_1 - T_0) + (T_3 - T_0)\right]$$

$$T_1 = T_3 \Rightarrow W_b = -2n\left(\frac{p_0V_0}{T_0}\right)(T_1 - T_0)$$

$$W_b = -2\cdot 4{,}32\cdot 10^3(533 - 293)\,J$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{W_b = -2{,}07\cdot 10^6\,J}}$$

d) $$W = \int_{V_0}^{V_2} p(V)\,dV = \int_{V_0}^{V_2} \frac{nRT_0}{V}\,dV$$

$$\Leftrightarrow W = nRT_0 \ln\left[V_2/V_0\right] = p_0V_0 \ln(V_2/V_0)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{W}} = 1{,}013\cdot 10^5\cdot 5{,}0 \ln(25/100)\,J = \underline{\underline{-1{,}5\cdot 10^6\,J}}$$

17.4 En ekte varmekraftmaskin som opererer mellom 400 K og 650 K, produserer 500 J arbeid per syklus med tilført varme lik 1500 J.

a) Sammenlign effektiviteten med effektiviteten til en carnotmaskin.

b) Beregn den totale entropiendringen til universet for hver syklus til varmekraftmaskinen.

c) Beregn den totale entropiendringen til universet for en carnotmaskin som opererer mellom de samme to temperaturene.

d) Vis at differansen i arbeid som blir utført av disse to maskinene, er $T_L\Delta S$, der T_L er temperaturen til det kalde reservoaret (400 K) og ΔS er universets entropiendring per syklus for den ekte maskinen.

Oppgave 17.4

a) Effektiviteten til maskinen er

$$\eta = \frac{|W|}{Q_H} = \frac{500\ \mathrm{J}}{1500\ \mathrm{J}} = \underline{0.333}$$

Effektiviteten til en carnotmaskin som arbeider mellom de samme to reservoraene er

$$\eta_c = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{400\ \mathrm{K}}{650\ \mathrm{K}} = \underline{0.385}$$

b) Varmen som fjernes fra maskinen og leveres til det kalde reservoaret er

$$Q_L = -W - Q_H = 500\ \mathrm{J} - 1500\ \mathrm{J} = -1000\ \mathrm{J}$$

Siden entropien er en tilstandsvariabel er maskinens entropiendring i en syklus lik null. Derimot er det forandringer i reservoarenes entropi, og disse er tilsammen lik universets entropiendring. Vi har da siden reservoarenes temperatur er konstant

$$\begin{aligned} \Delta S_{univ} &= \Delta S_H + \Delta S_L = \frac{-Q_H}{T_H} + \frac{-Q_L}{T_L} \\ &= \frac{-1500\ \mathrm{J}}{650\ \mathrm{K}} + \frac{1000\ \mathrm{J}}{400\ \mathrm{K}} \\ & \underline{\Delta S_{univ} = 0.192\ \mathrm{J/K}} \end{aligned}$$

Entropien til universet stiger altså fordi maskinen er irreversibel.

c) Carnotmaskinen er reversibel og da er den totale entropienedringen til universet

$$\Delta S^c_{univ} = 0$$

d) Arbeidet som utføres av carnotmaskinen er

$$-W_c = Q_H + Q_{cL}$$

og virkningsgraden er

$$\eta_c = \frac{-W_c}{Q_H} = 1 - \frac{T_L}{T_H}$$

Herav

$$-W_c = (1 - \frac{T_L}{T_H})Q_H$$

Merk at størrelsene er definert i forhold til maskinen, dvs. varme og arbeid som maskinen mottar. For den reelle varmekraftmaskinen har vi

$$-W = Q_H + Q_L$$

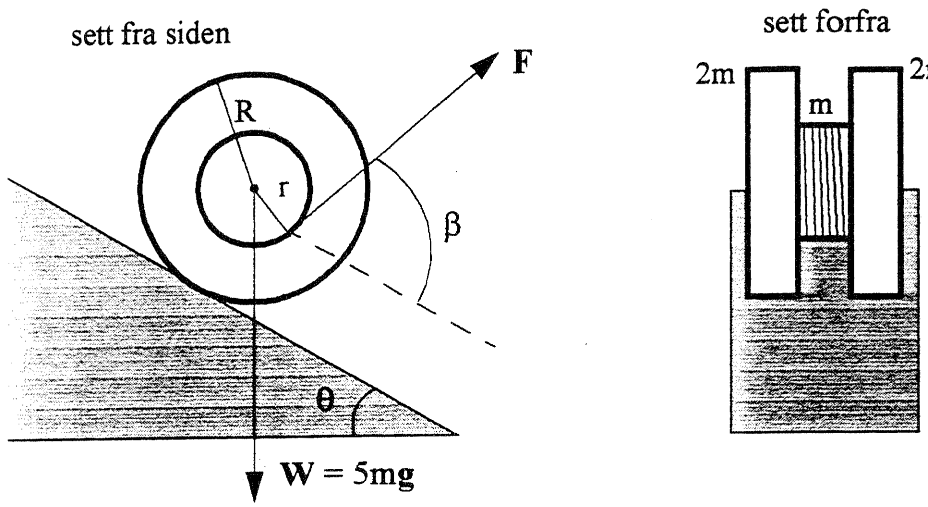
Forskjellen i arbeid blir da

$$\begin{aligned} \Delta W &= -W_c - (-W) = (1 - \frac{T_L}{T_H})Q_H - (Q_H + Q_L) \\ &= T_L \left(\frac{-Q_H}{T_H} + \frac{-Q_L}{T_L} \right) \end{aligned}$$

Vi sammenligner dette med uttrykket for ΔS_{univ} i del b) og får

$$\underline{\Delta W = T_L \Delta S_{univ}}$$

Oppgave 1



Figur 1

En jo-jo kan bevege seg på et skråplan som vist i figuren til venstre. Jo-jo'en består av to skiver, hver med masse 2m og radius R, og av en aksling med masse m og radius r som forbinder de to skivene. En snor er surret rundt akslingen som vist, og snordraget er **F** når det trekkes i snora, som kan antas å være masseløs. Treghetsmomentet om sin aksling for en skive med radius R og masse M er:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Anta at det virker en friksjons-kraft mellom jo-jo'en og underlaget som er stor nok til at bevegelsen blir en ren rullebevegelse.

a) Anta først at jo-jo'en ruller fritt ned skråplanet. Hva er forholdet mellom vinkelhastighet og hastigheten til et punkt på periferien til jo-jo'en ? Hva blir hastigheten til massemiddelpunktet ?

b) Anta så at vi trekker i snora med kraft F. Finn et uttrykk for vinkelakselerasjonen til jo-jo'en uttrykt ved: F, β, θ, r, R, og m.

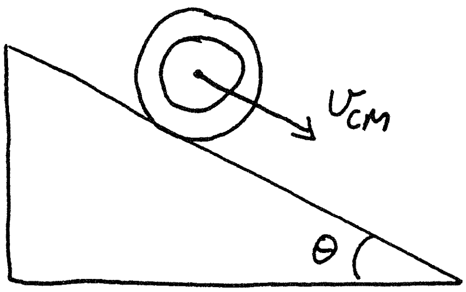
Benytt så følgende relasjoner: $R = 2r$, $F = 2mg$, og $\theta = 30°$.

c) For hvilke verdier av vinkelen β beveger jo-jo'en seg oppover skråplanet ? Forklar.

d) Forklar forskjellen på statisk og dynamisk friksjon.
Anta at friksjonskraften $F' = \mu N$, hvor μ = statisk friksjonskoeffisient og N er resulterende kraft på jo-jo'en normalt på skråplanet. Hvor stor må friskjonskoeffisienten μ være for at jo-jo'en ikke skal begynne å skli når vinkelakselerasjonen $\alpha = 0$?

Oppgave 1

a) $\underline{\underline{v = R\omega}}$



Total energi: $E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\underbrace{\omega^2}_{\left(\frac{v}{R}\right)^2} + Mgy$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)v^2 + Mgy$$

Startbet. $v = v_0$, $y = y_0$

$$E = E_0 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)v_0^{\,2} + Mgy_0$$

$$\Rightarrow \quad v^2 - v_0^{\,2} = \frac{2Mg(y_0 - y)}{M + I/R^2} \quad , \quad M = 5m$$

Treghetsmomentet I:

$$I = \frac{1}{2}(2m)R^2 \cdot 2 + \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}m(4R^2 + r^2)$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^{\,2} + \frac{10mg(y_0 - y)}{5m + 2m + \frac{1}{2}m(r/R)^2}}$$

$$\underline{\underline{v = \sqrt{v_0^{\,2} + \frac{10g(y_0 - y)}{7 + \frac{1}{2}(r/R)^2}}}}$$

Oppg. 16)

b) Newton's 2. lov (kraftbalanse) gir:

$$Ma = F\cos\beta + Mg\sin\theta - F' \quad ①, \quad M = 5m$$

hvor F' = friksjonskraft

Videre: $I\alpha = \tau_{tot} = F'R - Fr$ ②

hvor $\alpha > 0$ når jo-jo'en beveger seg nedover skråplanet.

Treghetsmomentet: $I = \frac{1}{2}m(4R^2 + r^2)$

① og ② gir:

$$I\alpha = (F\cos\beta + Mg\sin\theta - M\overbrace{R\alpha}^{a})R - Fr$$

$$\Rightarrow (I + MR^2)\alpha = FR\cos\beta + MgR\sin\theta - Fr$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{F(R\cos\beta - r) + 5mgR\sin\theta}{\frac{1}{2}m(4R^2 + r^2) + 5mR^2}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{F(R\cos\beta - r) + 5mgR\sin\theta}{7mR^2 + \frac{1}{2}mr^2}$$

c) $R = 2r$, $F = 2mg$, $\theta = 30°$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{2mgR\left(\cos\beta - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}mgR}{\left(7 + \frac{1}{8}\right)mR^2} = \frac{mgR\left[2\cos\beta + \frac{3}{2}\right]}{mR^2\left(7 + \frac{1}{8}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\alpha = \frac{56\,g\left[2\cos\beta + \frac{3}{2}\right]}{57R}}$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow \cos\beta = -\frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 138.6°}}$$

$\cos\beta < -\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha < 0 \Rightarrow \beta > 138.6°$

$\Rightarrow$ jo-jo'en beveger seg oppover

$\cos\beta > -\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow \beta < 138.6°$

$\Rightarrow$ jo-jo'en beveger seg nedover

d) Friksjon $F' = \mu N = \mu(5mg\cos\theta - F\sin\beta)$

Også: $\tau = F'R - Fr = I\alpha \Rightarrow F' = \dfrac{I\alpha + Fr}{R}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mu = \frac{(I\alpha + Fr)/R}{5mg\cos\theta - F\sin\beta}}$$

$\alpha = 0$, $r = \frac{1}{2}R$, $F = 2mg$, $\theta = 30° \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\beta = \sin(138.6°) = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu}} = \frac{2mg \cdot \frac{1}{2}}{5mg\frac{\sqrt{3}}{2} - 2mg\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{7}}{2}} = \underline{\underline{0.33}}$$

Oppgave 3.

a) To partikler med masser henholdsvis M_1 og M_2 er bundet sammen med en stiv streng av lengde L. Partiklenes radier er neglisjerbare i forhold til L og strengens masse er neglisjerbar i forhold til M_1 og M_2.

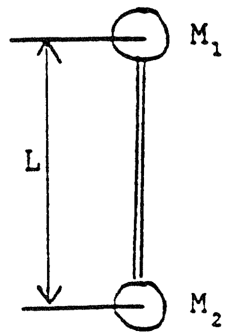


Fig. 1

Bestem posisjonen av massesenteret c og angi avstanden l_1 og l_2 fra c til henholdsvis M_1 og M_2. Diskuter spesielt tilfellet $M_1 >> M_2$. Vis at systemets treghetsmoment om c er gitt ved:

$$I = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} L^2$$

b)

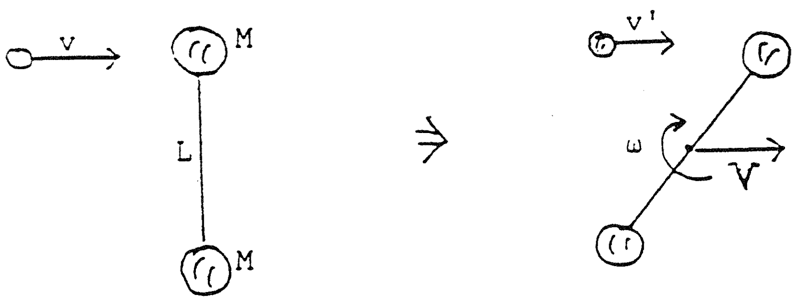


Fig. 2

La spesielt $M_1 = M_2 = M$. En partikkel med masse m kolliderer med den ene av massene M med hastighet v loddrett på forbindelseslinjen M - M (se figur 2). Dette er en enkel modell for å beskrive en kollisjon mellom f.eks. et elektron og et H_2-molekyl.

Oppgaven fortsettes neste side.

Som følge av kollisjonen vil molekylet få en kombinert translasjons- og rotasjonsbevegelse. Vis at det hersker følgende sammenheng mellom translasjonshastigheten V (av c) og vinkelhastigheten ω (om c):

$$\omega L = 2V$$

Hva blir <u>forholdet</u> mellom molekylets translasjonsenergi K_t og dets rotasjonsenergi K_r?

Mrk: Det er bare nødvendig å beregne <u>forholdet</u> mellom energiene, ikke selve energiene.

<u>Oppg. 3. Løsn</u>

a) Def. av C: $\vec{R} = \dfrac{\sum M_i \vec{R}_i}{\sum M_i}$

Origo i M_1 $\Rightarrow$

$$l_1 = \frac{M_1 \cdot 0 + M_2 \cdot L}{M_1 + M_2} = \underline{\underline{\frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot L}}$$

$$l_2 = L - l_1 = \underline{\underline{\frac{M_1}{M_1 + M_2} L}}$$

$$M_1 >> M_2 \Rightarrow \quad l_1 = \frac{M_2/M_1}{1 + M_2/M_1} L \approx \frac{M_2}{M_1} \cdot L << L.$$

$$l_2 = \frac{1}{1 + M_2/M_1} L \approx L.$$

C ligger tilnærmet i M_1.

$$I_c = \sum M_i l_i^2 = M_1 l_1^2 + M_2 l_2^2 \Rightarrow \underline{\underline{I_c = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} L^2 = M_{red} L^2}}$$

b) Impuls og dreieimpuls bevart i støtet :

Impulsbev: $mv = mv' + 2MV$. (1)

Dr. impulsbev: $mvL/2 = mv'L/2 + I\omega$. (2)

$1 \Rightarrow \quad v - v' = 2\frac{M}{m}V$.

$2 \Rightarrow \quad v - v' = \frac{2I}{mL}\omega = \frac{2I}{mL^2}(\omega L)$.

Sml $\Rightarrow$

$$\frac{2I}{mL^2}(\omega L) = 2\frac{M}{m}V \qquad \underline{\underline{\omega L = \frac{ML^2}{I}V = 2V}}$$

da $I = \frac{1}{2}ML^2$.

Mrk: Resultatet gjelder uavhengig av om energien er bevart eller ikke !

$$\frac{K_T}{K_R} = \frac{\frac{1}{2}(2M)V^2}{\frac{1}{2}I\omega^2} = \frac{4V^2}{(\omega L)^2} = \left(\frac{2V}{\omega L}\right)^2 = \underline{\underline{1}}$$

Lik fordeling på translasjon og rotasjon .

Oppgave 1

Den skotske presten Robert Stirling oppfant i 1816 en motor som har samme teoretiske virkningsgrad som Carnotsyklusen (den termodynamiske syklusen som har høyest virkningsgrad). Stirlingmotoren består av en sylinder med en ideell gass avstengt av to stempler. Rundt sylinderen er det kjøleribber.

Stirlingprosessen kan beskrives slik:

Prosess 1-2: Stempelet komprimerer gassen ved konstant temperatur, T_1, og varme blir ført ut av sylinderen.

Prosess 2-3: Volumet holdes konstant. Gassen blir varmet opp til temperaturen T_3.

Prosess 3-4: Varme tilføres gassen som utvider seg ved konstant temperatur til volumet er lik startvolumet.

Prosess 4-1: Gassen avkjøles ved konstant volum til temperaturen er lik starttemperaturen.

a) Tegn syklusen for Stirlingmotoren i et pV-diagram, og sett navn på de ulike prosesstrinnene i syklusen.

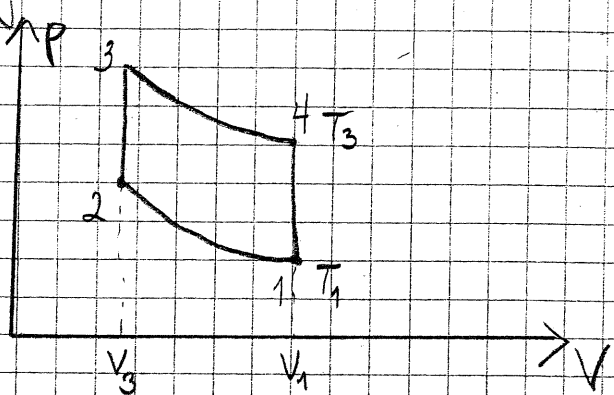
b) Bruk termodynamikkens 1. lov til å beskrive alle 4 prosessene. Hvilke prosesser skiller Stirlingsyklusen og Carnotsyklusen, som har 2 adiabatiske og 2 isoterme prosesstrinn?

c) Beregn det totale arbeidet pr. syklus og merk av dette arbeidet i pV-diagrammet.

d) En regenerator med virkningsgrad på 100% tar varmen som frigjøres i prosess 4-1 og bruker denne som tilført varme i prosess 2-3. Vis at dette fører til at Stirlingmotoren har samme virkningsgrad som Carnotsyklusen.

Oppgave 1

a)



1 - 2 : Isoterm prosess
2 - 3 : Isochor prosess
3 - 4 : Isoterm prosess
4 - 1 : Isochor prosess

b) Prosess 1 - 2, isoterm

⇒ Ingen endring i indre energi.

1. lov : $\Delta U = U_2 - U_1 = 0 = -W_{1\to2} + Q_{1\to2}$

$$Q_{1-2} = W_{1-2} = \int_{V_1}^{V_3} p\,dV$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{Q_{1\to2} = W_{1\to2}}} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V}\,dV = \underline{\underline{nRT_1 \ln(V_2/V_1)}}$$

Prosess 2 - 3, isochor

$$\Rightarrow \Delta V = 0 \quad \Rightarrow W_{2\to3} = 0$$

$$\underline{\underline{\Delta U = Q_{2\to3} = C_V(T_3 - T_1)}}$$

Prosess 3 - 4, isoterm, $\Delta U = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q_{3\to4} = W_{3\to4} = nRT_3 \ln(V_1/V_2)}}$$

Prosess 4 → 1, isochore, $W_{3\to4} = 0$

$$\underline{\underline{\Delta U_{4\to1} = Q_{4\to1} = C_V(T_1 - T_3)}}$$

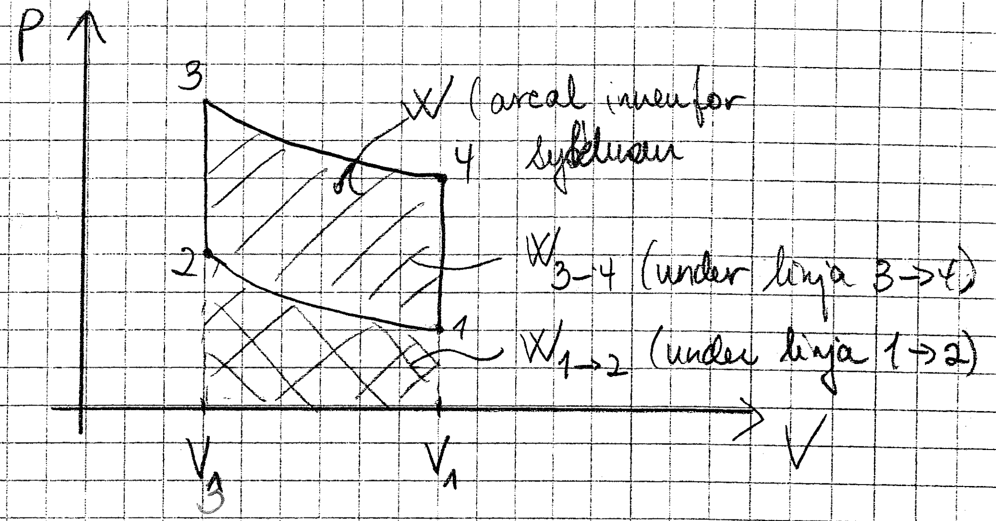
Prosesstrinn 2-3 og 4-1 skiller Stirlingmotoren fra Carnotsyklusen idet disse prosessene er isochore i Stirlingprosessen mens tilsvarende trinn i Carnotprosessen er adiabatiske.

c) Totalt arbeid:

$$\underline{\underline{W}} = W_{1\to 2} + W_{2\to 3} + W_{3\to 4} + W_{4\to 1}$$

$$= nRT_1 \ln(V_3/V_1) + nRT_3 \ln(V_1/V_3)$$

$$= \underline{\underline{nR(T_3 - T_1)\ln(V_1/V_3)}}$$



d) Virkningsgraden for Stirlingprosessen uten regenerator:

$$\eta_1 = \frac{W}{Q_{inn}}$$

$$Q_{inn} = Q_{2\to 3} + Q_{3\to 4} = C_V(T_3 - T_1) + nRT_3 \ln(V_1/V_3)$$

$$\underline{\underline{\eta_1 = \frac{nR(T_3 - T_1)\ln(V_1/V_3)}{nRT_3 \ln(V_1/V_3) + C_V(T_3 - T_1)}}}$$

Når varmen fra linne 4→1 tilføres linne 2→3 blir det ingen netto varmeoverføring i disse to prosessene og med at $|Q_{2-3}| = |Q_{4-1}|$

Med regenerator blir dermed virkningsgraden:

$$\eta_{reg} = \frac{nR(T_3 - T_1)\ln(V_1/V_3)}{nRT_3 \ln(V_1/V_3)} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = \eta_{carnot}$$