VEDLEGG TIL EKSAMENSOPPGAVER

FORMLER I EMNE TFY4115 FYSIKK

NB! Både **a** og $\vec{a}$ indikerer at størrelsen a er en vektor.

KINEMATIKK

Rettlinjet bevegelse

Akselerasjon: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

Hastighet: $v = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$

$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a\,dt'$

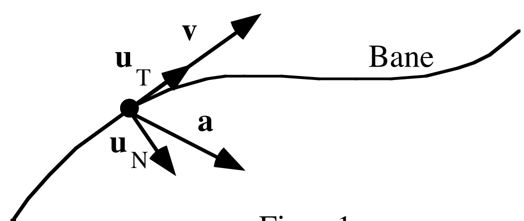
Veilengde: $x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,dt'$

Uniformt akselerert, rettlinjet bevegelse, a=konstant

Hastighet: $v = v_0 + a(t - t_0)$

Veilengde: $x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$

Krumlinjet bevegelse:



Figur 1

Hastighet: $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{u}_T \dfrac{ds}{dt}$

Akselerasjon: $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}$

$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_N$

Tangensialakselerasjon: $\mathbf{a}_T = a_T\mathbf{u}_T = \dfrac{dv}{dt}\mathbf{u}_T$

Normal-/sentripetalakselerasjon: $\mathbf{a}_N = a_N\mathbf{u}_N = \dfrac{v^2}{r}\mathbf{u}_N$ der r=krumningsradius

$\mathbf{u}_T$ og $\mathbf{u}_N$ er enhetsvektorer i henholdsvis tangensial- og normalretning, som vist i fig. 1.

<u>Sirkelbevegelse, radius r:</u>

Vinkelhastighet: $\omega = \dot{\theta} = \dfrac{v}{r}$

Vinkelakselerasjon: $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta} = \dfrac{a_T}{r} = \dfrac{\dot{v}}{r}$

Hastighet: $\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}$

Akselerasjon: $\mathbf{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{r}) = \vec{\omega} \times \mathbf{v}$

<u>Uniform sirkelbevegelse,</u> $\vec{\omega}$ **=**konstant

Vinkel: $\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$

Periode: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Frekvens: $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$

<u>Uniformt akselerert sirkelbevegelse,</u> $\vec{\alpha}$ **=**konstant:

Vinkel: $\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \dfrac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$

Vinkelhastighet: $\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$

KREFTER, BEVEGELSESMENGDE OG DREIEIMPULS

<u>Massemiddelpunkt, betegnet CM</u>

Total masse for system av partikler: $M = \sum_i m_i$

Massemiddelpunkt for system av partikler: $\mathbf{r}_{CM} = \dfrac{1}{M}\sum_{\mathbf{i}} m_i \mathbf{r}_i$

Massemiddelpunkt for stivt legeme: $\mathbf{r}_{CM} = \dfrac{1}{M}\int_M \mathbf{r} \cdot dm$

<u>Treghetsmoment</u> (Tabell for stive legemer på siste side)

For en partikkel med masse m om et punkt O i avstand r fra massen m: $I = mr^2$

For system av partikler: $I = \sum_i m_i r_i^2$

For stivt legeme: $I = \int_M r^2 \cdot dm$

Tabellen over treghetsmomenter på siste side er gitt med hensyn på en akse gjennom massemiddelpunktet CM. For en akse parallelt med aksen gjennom massemiddelpunktet finnes treghetsmomentet ved Steiners sats.

Parallellakseteoremet / Steiners sats: $I = I_{CM} + Mh^2$

der h er avstanden mellom de parallelle aksene.

Bevegelsesmengde

For en partikkel med masse m: $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$

For system av partikler: $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i\mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{CM}$

For stivt legeme: $\mathbf{P} = \int_M \mathbf{v}\cdot dm = M\mathbf{v}_{CM}$

Newtons 2. lov, impuls (kraftstøt)

For en partikkel med masse m: $\sum_{\mathbf{i}} \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$

For konstant masse m: $\sum_{\mathbf{i}} \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}$

For system av partikler med konstant masse:

$$\mathbf{F}_{ext} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i m_i\mathbf{a}_i = M\mathbf{a}_{CM}$$

For stivt legeme (konstant masse): $\mathbf{F}_{ext} = \sum_i \mathbf{F}_i = M\mathbf{a}_{CM}$

Impuls (kraftstøt), for en partikkel: $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\cdot dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$

For et system av partikler finnes impulsen ved summering over alle partiklene. For stivt legeme gjelder formelen for impulsen når hastighetene refererer seg til CM og m er total masse for legemet.

Formlene ovenfor gjelder i et treghetsreferansesystem. Dersom koordinatsystemet har en akselerasjon $\mathbf{a}_r$ relativt et treghetsreferansesystem er $\mathbf{a}$ gitt ved $\mathbf{a}= \mathbf{a}'+ \mathbf{a}_r$, der $\mathbf{a}'$ er akselerasjonen relativt det akselererte koordinatsystemet .

Newtons 3. lov

Når et legeme A virker på et legeme B med en kraft, vil alltid B virke tilbake på A med en like stor og motsatt rettet kraft. Kraft = -Motkraft. Kraft og motkraft virker alltid på hvert sitt legeme.

Gravitasjonsvekselvirkning

To masser m og M i avstand **r** fra hverandre (CM til CM) virker med gjensidig like store krefter på hverandre gitt ved:

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\mathbf{r} \quad \text{der } G = 6.67259 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}} \text{ er gravitasjonskonstanten.}$$

Friksjon

Betegner N=normalkraft, F'=friksjonskraft og μ=friksjonskoeffisient.

Statisk friksjon: $f_s \leq \mu_s N$

Kinetisk friksjon: $f_k = \mu_k N$

Fjærkraft

Kraft fra fjær med fjærkonstant k: $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ der **r** er avstanden fra likevektsposisjonen

Spinn og dreiemoment

Dreiemoment om et punkt O: $\vec{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ der $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i$ når flere krefter virker.

Spinn for en partikkel med bevegelsesmengde $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ om et punkt O:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Spinnsatsen for en eller flere partikler om et punkt O:

$$\vec{\tau}_{ext} = \sum_i \vec{\tau}_i = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{L}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

som gjelder når O er i ro i forhold til et treghetsreferansesystem.

For et stivt legeme som roterer om en akse, z-aksen, gjennom O:

$$L_z = I_z \omega$$

Spinnsatsen for stivt legeme om z-aksen gjennom O:

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha = I_z \dot{\omega}$$

Langs hovedtreghetsakser gjelder: $\mathbf{L} = I\vec{\omega}$

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

Totalt spinn: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{orb} + \mathbf{L}_{int}$

der $\mathbf{L}_{orb} = \mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{P} = \mathbf{r}_{CM} \times (M\mathbf{v}_{CM})$

og $\frac{d\mathbf{L}_{int}}{dt} = \vec{\tau}_{CM}$

$\vec{\tau}_{CM}$ er dreiemoment pga. $\mathbf{F}_{ext}$ relativt CM.

Legeme i likevekt

Translasjonslikevekt: $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$

Rotasjonslikevekt: $\sum_i \vec{\tau}_i = 0$

ARBEID OG ENERGI

Kinetisk energi, E_k

Partikkel med masse m: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$

System av partikler: $E_k = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$

Stivt legeme: $E_k = E_{k,trans} + E_{k,rot}$

der $$E_{k,trans} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

og $$E_{k,rot} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

I_{CM} er treghetsmomentet om rotasjonsaksen gjennom CM.

Rotasjon om fast akse, z-aksen: $E_{k,rot} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$

Arbeid, W

Arbeid utført på et legeme av resultantkraften **F** fra pkt. A til B:

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Arbeidssetningen: $W_{AB} = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A}$

For stivt legeme: $W_{AB} = W_{AB}^{trans} + W_{AB}^{rot}$

der translasjonsarbeidet: $W_{AB}^{trans} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_{CM} = \Delta E_{k,trans}$

og rotasjonsarbeidet: $W_{AB}^{rot} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_{CM} \cdot d\theta = \Delta E_{k,rot}$

Effekt i translasjonsbevegelse: $P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

Effekt i rotasjonsbevegelse: $P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$

Konservative krefter

Konservativ kraft: $\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} \right)$ der U er potensiell energi.

Arbeid utført av konservativ kraft: $W_{AB} = -\Delta U = U_A - U_B$

Total mekanisk energi: $E = E_k + U$

Lov om konservering av total mekanisk energi, E = konstant, $\Delta E = 0$:

$$E_A = E_B = E_{k,A} + U_A = E_{k,B} + U_B$$

Potensiell energi, U

I tyngdefeltet: $U = mgy$ der **g** peker i negativ y-retning.

Potensiell energi for fjær med fjærkonstant k: $U = \frac{1}{2} k r^2$

der r er målt fra likevektsposisjonen.

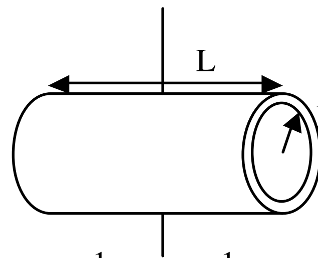
Kombinasjon av konservative og ikke-konservative krefter

Arbeid utført av ikke-konservativ kraft: $W' = \Delta(E_k + U)$

TABELL OVER TREGHETSMOMENTER

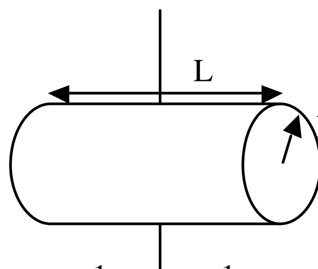
Alle legemene er homogene og har masse M. Velger z-aksen som rotasjonsaksen som går gjennom massemiddelpunktet til legemene. Treghetsmomentet om z-aksen kalles i dette tilfellet I_{CM} der $I_{CM}=I_z$.

$$I = MR^2$$

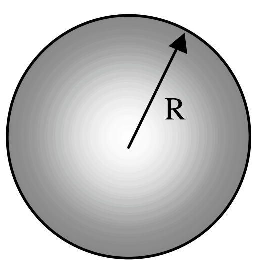


$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

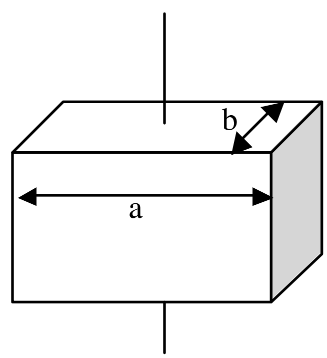


$$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

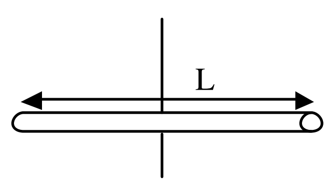


For ei massiv kule: $I = \frac{2}{5}MR^2$

For et kuleskall: $I = \frac{2}{3}MR^2$



$$I = \frac{1}{12}M\left(a^2 + b^2\right)$$



$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

SVINGNINGER

Enkel harmonisk, udempet, fri svingning

Svingelikning for udempet, fri svingning i 1 dimensjon: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

For masse-fjær systemet: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

For matematisk pendel ved små utslag θ $(x \rightarrow \theta)$: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$

der L = lengden av pendelen og g = tyngdens akselerasjon.

For fysisk pendel ved små utslag θ $(x \rightarrow \theta)$: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{MgD}{I}}$

der D = avstanden fra rotasjonsaksen til CM, M = pendelens masse og I = pendelens treghetsmoment om rotasjonsaksen.

Løsning av svingelikningen: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

der A=amplituden og ϕ=faseforskyvningen.

Perioden: $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

Frekvensen: $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$

Dempet, harmonisk, fri svingning

Svingelikning for dempet, harmonisk, fri svingning:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Innfører : $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ og $\gamma = \dfrac{b}{2m}$

<u>1. Underdempning</u>, $\gamma < \omega_0$, med løsning:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \phi)$$

der $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

<u>2. Kritisk dempning</u>, $\gamma = \omega_0$, med løsning:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$$

<u>3. Overdempning</u>, $\gamma > \omega_0$, med løsning:

$$x(t) = Ae^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Be^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$$

Tvungne svingninger

Svingelikning for tvungne svinginger: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0\cos(\omega t)$

Generell løsning: $x(t) = x_{hom} + x_{spes}$

Valgt, spesiell løsning: $x_{spes} = A\cos(\omega t - \varphi)$

med $A = \dfrac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + b^2\omega^2}}$

og $\tan(\varphi) = \dfrac{b\omega}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$

TERMODYNAMIKK

Kinetisk gass teori

Ideell gass lov: $PV = nRT = NkT$

der n = antall mol av gassen med trykk P, absolutt temperatur T og volum V.
R = 8.314 J/(mol·K) = universell gasskonstant. N = antall molekyler. K = 1.381×10^{-23} J/K = Boltzmanns konstant.

Ekvipartisjonsprinsippet: $E_{av} = \dfrac{1}{2}kT$ pr. frihetsgrad pr. molekyl

Varme

Varmekapasitet for tilført varme Q: $C = \dfrac{Q}{\Delta T}$

Varmekapasitet ved konstant volum: $C_V = \dfrac{Q_V}{\Delta T} = \dfrac{dU}{dT}$ der U = indre energi

Varmekapasitet ved konstant trykk: $C_p = \dfrac{Q_p}{\Delta T}$

For en ideell gass: $C_P = C_V + nR$

For ideell monoatomisk gass: $C_v = \dfrac{3}{2}nR$

Spesifikk varmekapasitet: c = C/m ; Molar spesifikk varmekapasitet: c’= C/n

Smeltevarme for materiale med spesifikk smeltevarme L_f: $Q_f = mL_f$

Fordampningsvarme for materiale med spesifikk fordampningsvarme L_v: $Q_v = mL_v$

Termodynamikkens 1. lov

Netto varme Q tilført et system går til økning av indre energi U og arbeid utført av systemet W: $Q = \Delta U + W$

Indre energi for en ideell gass: $U = \dfrac{f}{2}nRT$ der f = antall frihetsgrader

For adiabatisk, ideell gass: $TV^{\gamma-1}$ = konst. eller PV^{γ} = konst. der $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$

Arbeid W utført av en gass i en kvasistatisk prosess: $W = \int P \cdot dV$

Termodynamikkens 2. lov

Ingen prosess er mulig der det eneste resultat er at varme avgis fra et varmereservoar og omsettes helt til arbeid.

Ingen prosess er mulig der det eneste resultat er at en varmemengde avgis fra ett varmereservoar og absorberes av et annet med høyere temperatur.

Ingen syklisk virkende varmekraftmaskin som arbeider mellom to gitte temperaturer kan ha større virkningsgrad enn Carnotmaskinen.

Virkningsgrad for en maskin som tilfører varme Q_h fra et varmt reservoir, utfører arbeidet W og overfører varmen $|Q_c|$ til et kaldt reservoar:

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h}$$

Virkningsgrad for Carnotsyklusen: $\eta = 1 - \frac{T_c}{T_h}$

Effektfaktor for en kjølemaskin/varmepumpe som tilfører varme Q_c fra et kaldt reservoar, utfører arbeidet W på systemet og overfører varmen $|Q_h|$ til et varmt reservoar:

For en kjølemaskin: $COP = \frac{|Q_c|}{W}$

For ei varmepumpe: $COP = \frac{|Q_h|}{W}$

Entropi

Endring i entropi i en reversibel prosess der dQ_{rev} er tilført varme i den reversible prosessen som forbinder tilstandene: $dS = \frac{dQ_{rev}}{T}$

VARMETRANSPORT

Varmeledning

Varmestrøm (i Watt) i 1 dimensjon (x-retningen) ved temperaturforskjell ΔT gjennom et materiale med varmekonduktivitet k, tykkelse Δx og areal A: $I = kA\frac{\Delta T}{\Delta x}$.

Varmeresistansen: $R = \frac{1}{k}\frac{\Delta x}{A}$

Seriekopling av n varmeresistanser: $R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta x_i}{k_i}$

Parallellkopling av n varmeresistanser: $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^{n} k_i A_i$

Konveksjon

Varmestrøm ved konveksjon fra en overflate med areal A og temperatur T_s til gass/væske med temperatur T_g og varmeovergangskoeffisient h: $I = h \cdot A(T_s - T_g)$

Stråling

Varmestrøm eller utstrålt effekt for et legeme med emissivitet e, areal A og temperatur T, er gitt ved Stefan Boltzmanns lov: $P_r = e\sigma AT^4$

med Stefan Boltzmanns konstant $\sigma = 5{,}6703 \cdot 10^{-8}\,W/(m^2 \cdot K^4)$

Netto utstrålt effekt fra legemet ved temperatur T til omgivelser med temperatur T_0:

$$P_{net} = e\sigma A(T^4 - T_0^4) = I_{net,radiation}$$

Wiens forskyvningslov for legeme med temperatur T: $\lambda_{max} = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\, m \cdot K}{T}$