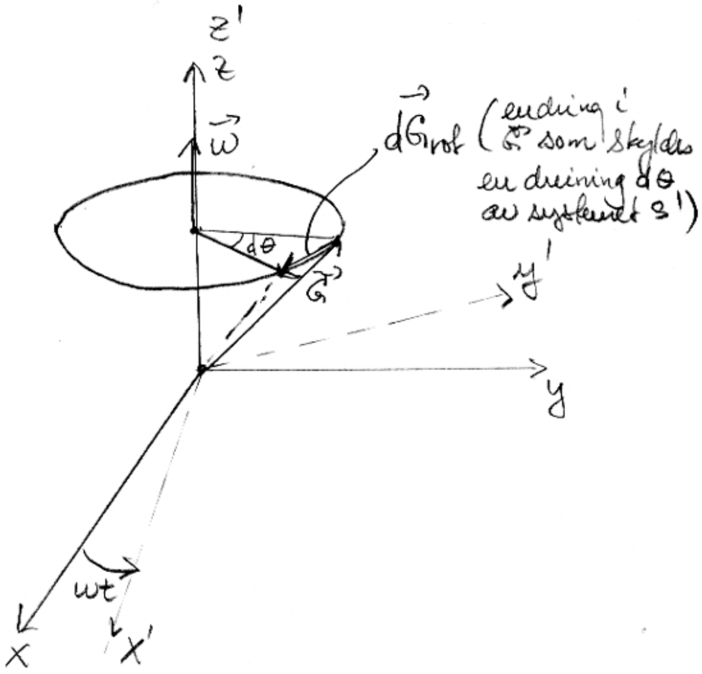
Roterende koordinatsystem



Vi begynner med å vise hvordan den tidsderiverte av en generell vektor $\vec{G}$ transformerer fra et treghetsreferansesystem $S\,(x, y, z)$ til et akselerert system S' (x', y', z')

I de to referansesystemene er:

$$\vec{G} = \sum_i G_i \vec{u}_i = \sum_i G_i' u_i' \quad (i = x, y, z)$$

$\vec{u}_i$ enhetsvektor

Antar at $\vec{G}$ endrer seg $d\vec{G}$ sett fra treghetsystemet S. Sett fra S':

$$d\vec{G}_{S'} = d\vec{G}_S + d\vec{G}_{rot}$$

der $d\vec{G}_{rot}$ er endringen i $\vec{G}$ som skyldes at S' har rotert $d\theta$ i tidsrommet dt med vinkelhastighet ω

$$d\vec{G}_{rot} = \vec{G} \times \vec{\omega}\, dt$$

(Motsatt av hastigheten)

$$\Rightarrow \quad d\vec{G}_{S'} = d\vec{G}_S + \vec{G} \times \vec{\omega}\, dt$$

$$d\vec{G}_S = dG_{S'} + (\vec{\omega} \times \vec{G})\, dt$$

Sammenhengen mellom de tidsderiverte av vektoren $\vec{G}$ i S-systemet og S'-systemet blir da:

$$\boxed{\left(\frac{dG}{dt}\right)_S = \left(\frac{dG}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{G}} \quad (1)$$

Gjelder en generell vektor!

I S' systemet

Vi ser på tilfellet at S'-systemet har en konstant vinkelhastighet $\vec{\omega}$ relativt S og at det ikke er noen translasjonsbevegelse av S' relativt S.

For en partikkel som har hastighet $\vec{v}$ i S-systemet er relasjonen mellom $\vec{v}$ i S-systemet og $\vec{v}\,'$ i S'-systemet:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \quad \text{(idet vi har brukt likn. (1))}$$

Akselerasjonen for partikkelen blir da i S-systemet:

$$\dot{\vec{v}} = (\dot{\vec{v}}\,')_S + \vec{\omega} \times (\dot{\vec{r}}\,')_S$$

Med bruk av likn. (1) gir dette:

$$\dot{\vec{v}} = (\dot{\vec{v}}\,')_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \left[(\dot{\vec{r}}\,')_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \right]$$

$(\dot{\vec{v}}\,')_{S'} = \vec{a}\,'$ = akselerasjonen til partikkelen målt i S'-systemet

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

Newtons 2. lov kan da skrives:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}\,' + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + m\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}\,']$$

Dersom Newtons 2. lov skal ha vanlig form i S'-systemet: $\vec{F} = m\vec{a}\,'$ må det innføres fiktiv/pseudo-krefter:

$$m\vec{a}\,' = m\vec{a} \underbrace{- 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,'}_{\text{Corioliskraft}} \underbrace{- m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')}_{\text{Sentrifugalkraften}}$$

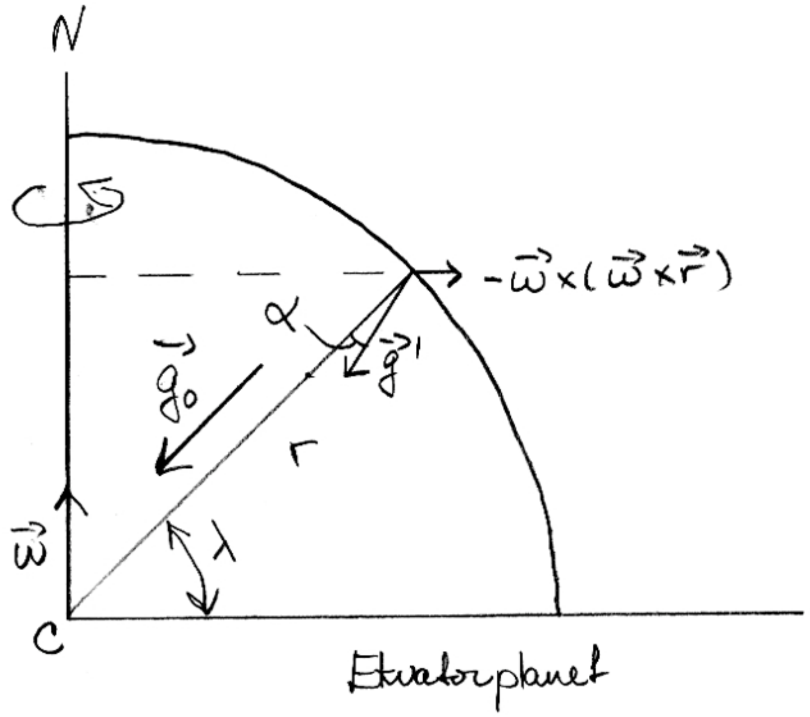
Corioliskraften eksisterer kun for partikler i bevegelse $\vec{v}\,'$ i forhold til S'-systemet.

Sentrifugalkraften er en følge av at S'-systemet roterer i forhold til S-systemet som er et treghetsreferansesystem.

Sentrifugalakselerasjonen

Leddet forårsaker små variasjoner i målt $\vec{g}$

$$\vec{g}' = \vec{g}_0 - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \quad [\vec{g}_0 \text{ i treghets-referansesystem}]$$



Sentrifugalleddet er mye mindre enn $\vec{g}_0$ (overdrevet på figuren)

$\vec{g}'$ avviker ørlite fra normalen til jord<u>kula</u>

Nordpolen $g = 9{,}8321$ m/s²

Ekvator $g = 9{,}7799$ m/s²

$\alpha = 0°$ ved ekvator og polene

$\alpha = \alpha_{max} = 0{,}1°$ ved $\lambda = 45°$

$\alpha_{OSLO} = 0{,}085° \quad (\lambda = 59{,}9°)$

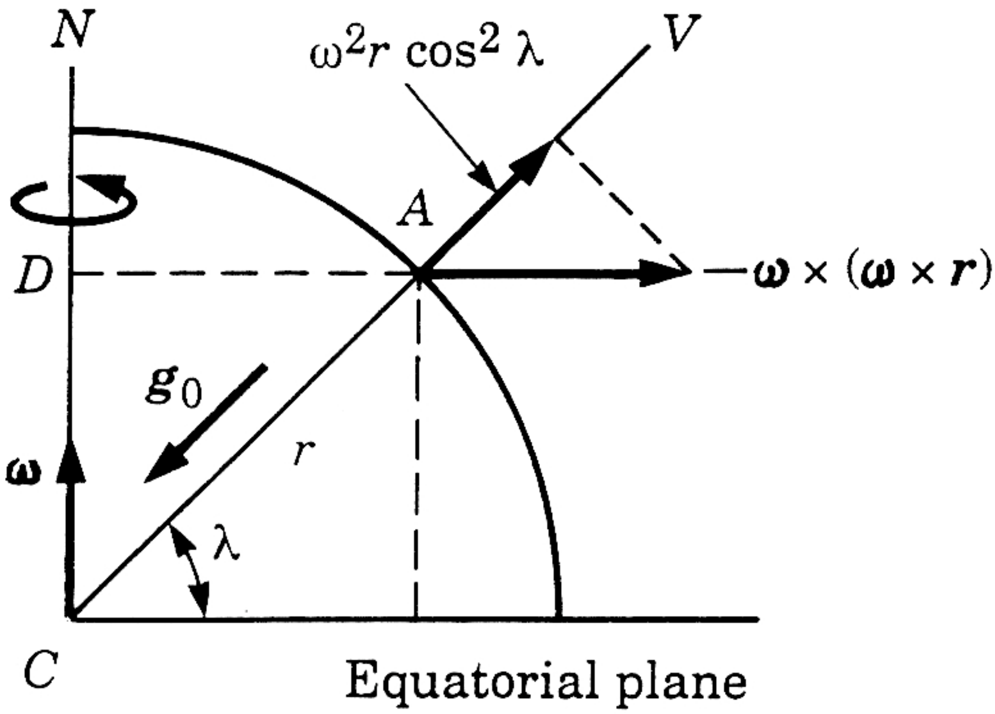
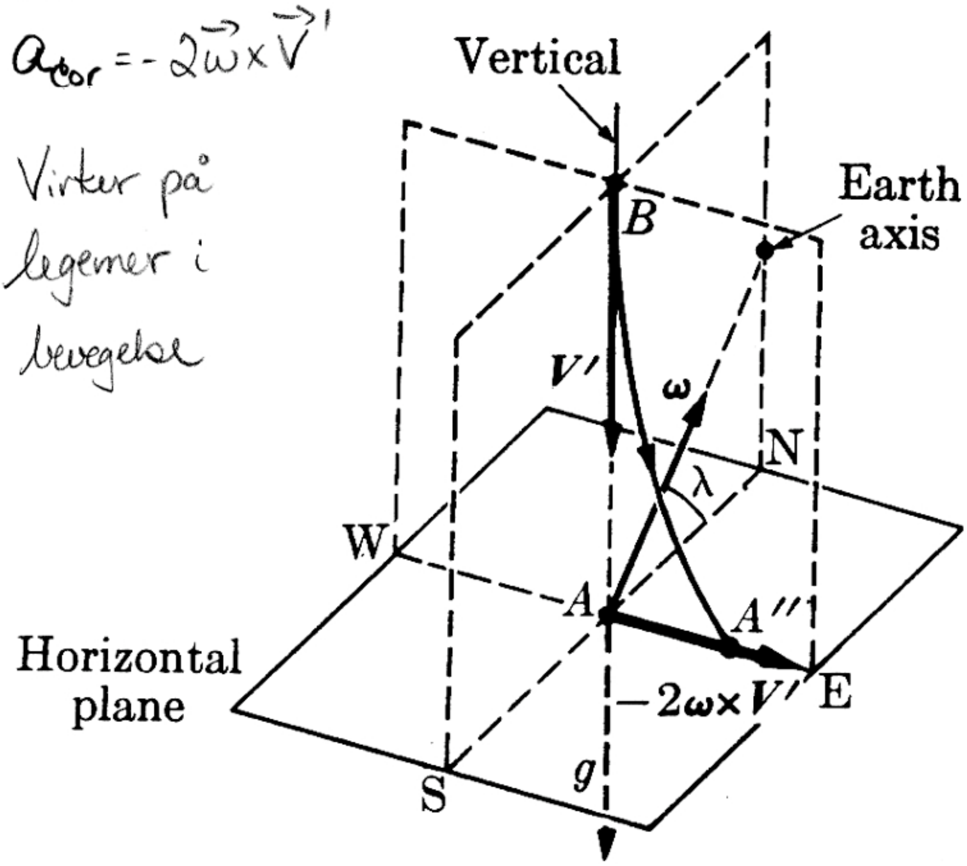


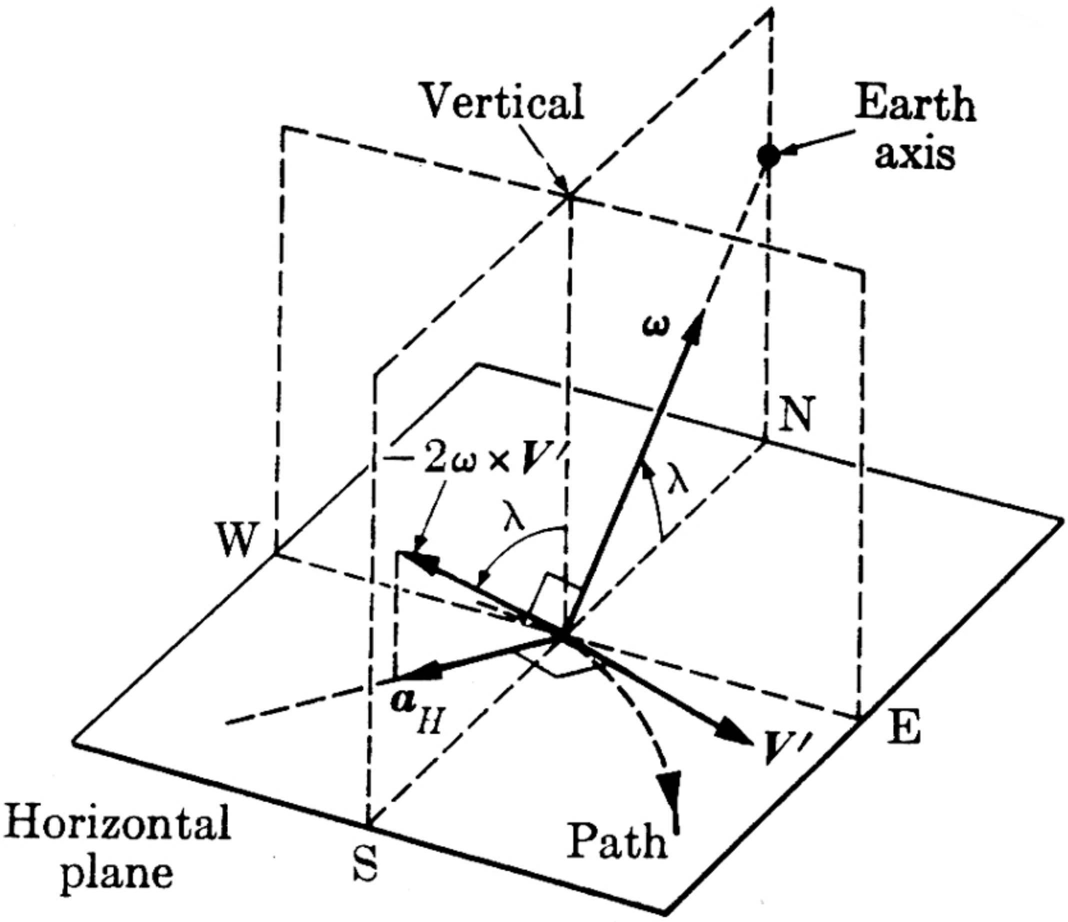
Figure 5.11 Centrifugal acceleration due to the rotation of the Earth.

Coriolis akselerasjon

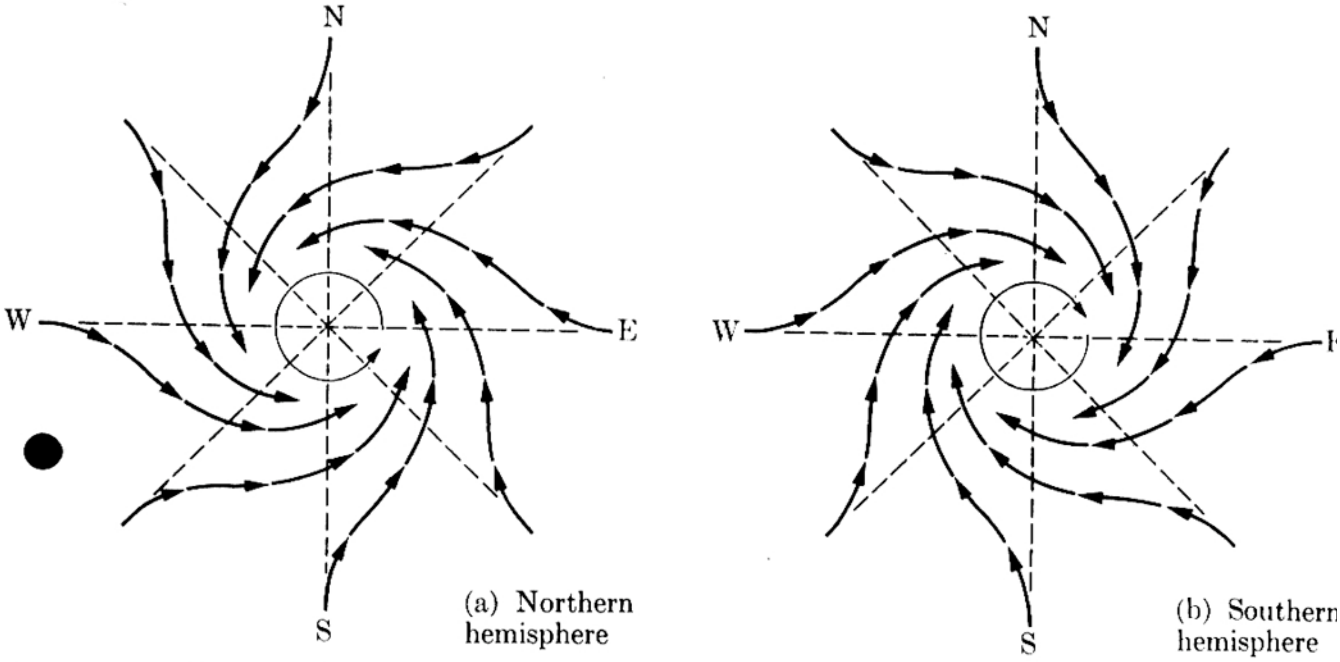
$a_{cor} = -2\vec{\omega} \times \vec{V}'$

Virker på legemer i bevegelse





Vindretning inn mot lavtrykk



Counter-clockwise (clockwise) whirling of wind in the Northern (Southern) hemisphere resulting from a low-pressure center combined with Coriolis acceleration.

Foucaults pendel