Eksamen i fag TFY4165/FY1005
Termisk fysikk, 22/5-2006

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) For å bestemme p_2 trenger en sammenhengen mellom trykk og temperatur langs en adiabat. For ideell gass har en langs adiabater $pV^\gamma = \text{konst}$. Volumet V kan elimineres via $pV = RT$. En finner

$$pV^\gamma = p\left(\frac{RT}{p}\right)^\gamma = p^{1-\gamma}T^\gamma R^\gamma = \text{konst}$$

$$p\,T^{-\alpha} = \text{konst}$$

der $\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{C_p}{C_p - C_V} = \frac{C_p}{R}$. (1 mol)

($C_p = C_V + R$ for ideell gass.) En finner så

$$p_1 T_1^{-\alpha} = p_2 T_2^{-\alpha}$$

$$p_2 = p_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^\alpha, \qquad \left(\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1}\right)$$

og tilsvarende

$$p_2 T_3^{-\alpha} = p_1 T_4^{-\alpha}$$

$$p_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^\alpha T_3^{-\alpha} = p_1 T_4^{-\alpha}$$

$$\frac{T_2}{T_1 T_3} = \frac{1}{T_4}$$

$$T_4 = \frac{T_3 T_1}{T_2}$$

b) Oppvarming og avkjøling skjer ved konstant trykk. Tilført varme blir følgelig

$$Q_2 = \int dQ = \int_{T_2}^{T_3} C_p\,dT = C_p(T_3 - T_2)$$

Avgitt varme blir tilsvarende ($Q_1 < 0$)

$$Q_1 = C_p(T_1 - T_4) = C_p\left(T_1 - T_1\frac{T_3}{T_2}\right) = -C_p\frac{T_1}{T_2}(T_3 - T_2).$$

Virkningsgraden blir følgelig

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{Q_2 + Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{C_p\frac{T_1}{T_2}(T_3 - T_2)}{C_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}.$$

c) Likevektstemperaturen er $T_0 = T_1$. Endring i entropi blir

$$\Delta S = S_1 - S_4 = C_V \ln(T_1/T_4) + R\ln(V_1/V_4) =$$

$$C_V \ln(T_1/T_4) + R\ln\left(\frac{RT_1}{p_1}\frac{p_1}{RT_4}\right) = C_p \ln(T_1/T_4)$$

Endring i indre energi

$$\Delta U = C_V(T_1 - T_4)$$

Endring i volum ΔV

$$p_1\Delta V = p_1(V_1 - V_4) = R(T_1 - T_4)$$

Maksimalt arbeid blir følgelig

$$W_{max} = T_1\Delta S - \Delta U - p_1\Delta V = C_p\left[T_4 - T_1 - T_1\ln\frac{T_4}{T_1}\right].$$

Oppgave 2.

a) I termisk likevekt er trykk, temperatur og kjemiske potensial konstante over systemet.

Ved likevekt mellom væskefase og dampfase må kjemisk potensial eller Gibbs fri energi være den samme i begge fasene. Når temperaturen endres må en da ha

$$dG_v = dG_g$$

$$-S_v\,dT + V_v\,dp = -S_g\,dT + V_g\,dp$$

$$(S_g - S_v)\,dT = (V_g - V_v)\,dp$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{S_g - S_v}{V_g - V_v} = \underline{\underline{\frac{L}{T(V_g - V_v)}}}$$

der $L = \underline{T(S_g - S_v)}$ er fordampingsvarmen.

[L er varme tilført ved konstant temperatur, $L = \int dQ = \int T\,dS = T\int dS = T(S_g - S_v)$.]

b) Med $V_v << V_g$ og antagelse om ideell gass finner en

$$V_g - V_v = V_g = \frac{RT}{p}$$

slik at

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{RT^2}\,p$$

$$L = RT^2 \frac{1}{p}\frac{dp}{dT} = RT^2 \frac{d}{dT}(\ln p).$$

Det gitte uttrykket gir så

$$\ln p = \ln K - \alpha \ln T - \frac{L_1 + \alpha R T_1}{RT}$$

$$\frac{d}{dT}(\ln p) = -\frac{\alpha}{T} + \frac{L_1 + \alpha R T_1}{RT^2},$$

som innsatt gir

$$L = -\alpha RT + L_1 + \alpha R T_1 = \underline{\underline{L_1 + \alpha R(T_1 - T).}}$$

c) For damptrykket ved henholdsvis $T_0 = 0°C$ og $T_1 = 100°C$ har en

$$\ln p_0 = \ln K - \alpha \ln T_0 - \frac{L_1 + \alpha R T_1}{RT_0}$$

$$\ln p_1 = \ln K - \alpha \ln T_1 - \frac{L_1 + \alpha R T_1}{RT_1}.$$

Ved å ta differensen mellom likningene finner en

$$\ln \frac{p_1}{p_0} = -\alpha \ln \frac{T_1}{T_0} - \frac{L_1}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}\right) - \alpha\left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) - \frac{L_1}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) = \alpha\left(\frac{T_1}{T_0} - 1 - \ln\frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$\alpha = \frac{\ln \frac{p_1}{p_0} - \frac{L_1}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right)}{\frac{T_1}{T_0} - 1 - \ln\frac{T_1}{T_0}} = \frac{\ln\frac{760}{4{,}58} - \frac{40{,}7\cdot 10^3}{8{,}314}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{373}\right)}{\frac{373}{273} - 1 - \ln\frac{373}{273}}$$

$$= \underline{\underline{5{,}6}}$$

Oppgave 3.

a) Ved innsetting i varmeledningslikningen finner en

$$\nabla^2 T = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)(A \ln r + B) =$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{A}{r} = -\frac{A}{r^2} + \frac{A}{r^2} = 0,$$

dvs. likningen er oppfylt.

Grensebetingelsene gir

$$A \ln R_1 + B = T_1$$
$$A \ln R_2 + B = T_2$$

$$A \ln(R_2/R_1) = T_2 - T_1$$

$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$B = T_2 - A \ln R_2 = T_2 - \frac{(T_2 - T_1)\ln R_2}{\ln R_2 - \ln R_1} = \frac{T_1 \ln R_2 - T_2 \ln R_1}{\ln(R_2/R_1)}.$$

b) Varmestrømtettheten er gitt ved

$$\dot{j} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r} = -\kappa \frac{A}{r}$$

Overflaten til en sylinder med lengde L og radius r er

$$S = 2\pi r L$$

Resulterende varmestrøm blir følgelig

$$\dot{Q} = S\dot{j} = 2\pi r L\left(-\kappa\frac{A}{r}\right) = 2\pi \kappa L \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_2/R_1)} =$$

$$2\pi \cdot 0{,}04\frac{W}{mK}\, 0{,}70m \cdot \frac{(30-20)K}{\ln(2/1)} = 2{,}54\,W \quad (= 2{,}5\,W)$$

c) Netto varmestrømtetthet ved stråling blir

$$\dot{j}_n = \sigma(T_2^4 - T_0^4)$$

Med liten differense $\Delta T = T_2 - T_0$ kan dette lineariseres

$$T_2^4 = (T_0 + \Delta T)^4 = T_0^4 + 4T_0^3 \Delta T + \cdots$$

slik at vi finner

$$\dot{j}_n = 4\sigma T_0^3 \Delta T = 4\sigma T_0^3 (T_2 - T_0)$$

Dvs. $F = 4\sigma T_0^3$.

Ved radien $r = R_2$ må varmestrømtettheten til strålingen være lik den i røret slik at $\dot{j} = \dot{j}_n$ eller

$$-\kappa\frac{A}{R_2} = G(T_1 - T_2) = F(T_2 - T_0)$$

$$G T_1 + F T_0 = (G + F) T_2$$

$$T_2 = \frac{G T_1 + F T_0}{G + F} = T_0 + \frac{G}{G+F}(T_1 - T_0)$$

der

$$G = -\kappa\frac{A}{R_2(T_1 - T_2)} = \frac{\kappa}{R_2 \ln(R_2/R_1)}$$