Termiske fysikk, 2006.

Løsning øving 1.

Oppgave 1.

a) Endring av trykket Δp ved en liten endring av temperaturen ΔT er ved konstant volum gitt ved

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T$$

For å bestemme den deriverte benyttes relasjonen

$$-1 = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V (-V K_T)\left(\frac{1}{V\alpha}\right)$$

der $K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ og $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p^{-1}$.

For hver grad temperaturstigning blir dermed

$$\Delta p = \frac{\alpha}{K_T}\Delta T = \frac{48{,}5\cdot 10^{-6}}{7{,}7\cdot 10^{-12}}\cdot 1\,\mathrm{Pa} = \underline{\underline{6{,}3\cdot 10^6\,\mathrm{Pa}}} \approx \underline{\underline{62\,\mathrm{atm}}}.$$

b) Ved derivering på begge sider finner en

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_T = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}\right) = \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial T} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial V}{\partial T}$$

$$-\left(\frac{\partial K_T}{\partial T}\right)_p = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\right) = \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial T\,\partial p} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial p}$$

Ved sammenlikning ser en følgelig at

$$\underline{\underline{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial K_T}{\partial T}\right)_p}}$$

Oppgave 2.

a) Trykket i 1 mol ideell gass ved 20°C og volum 24,0 l

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{8{,}314\,\mathrm{J/K}\cdot 293\,\mathrm{K}}{24{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} = \underline{\underline{1{,}015\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}} = \underline{\underline{1\,\mathrm{atm}}}.$$

Med volumet 0,24 l og samme temperatur blir trykket

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{8{,}314\cdot 293}{0{,}24\cdot 10^{-3}}\,\mathrm{Pa} = \underline{\underline{1{,}015\cdot 10^7\,\mathrm{Pa}}} = \underline{\underline{100\,\mathrm{atm}}}$$

b) Med Van der Waals tilstandslikning blir trykket for 1 mol luft ved 20°C og volum 24,0 l

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} = \frac{8{,}314\cdot 293}{(24{,}0-0{,}0367)\cdot 10^{-3}}\,\mathrm{Pa} - \frac{1{,}368\cdot 10^{5-6}}{(24{,}0\cdot 10^{-3})^2}\,\mathrm{Pa}$$

$$= \underline{\underline{1{,}014\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}} = \underline{\underline{1\,\mathrm{atm}}}$$

Med volum 0,24 l blir tilsvarende

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} = \left[\frac{8{,}314\cdot 293}{(0{,}240-0{,}0367)\cdot 10^{-3}} - \frac{1{,}368\cdot 10^{5-6}}{(0{,}24\cdot 10^{-3})^2}\right]\mathrm{Pa}$$

$$= \underline{\underline{0{,}961\cdot 10^7\,\mathrm{Pa}}} = \underline{\underline{96\,\mathrm{atm}.}}$$

($1\,\mathrm{atm} = 1{,}013\cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 760\,\mathrm{mmHg}$)

Oppgave 3.

Mottatt varme/energi i et tidsrom dt

$$dQ = P\,dt = C_p\,dT$$

Dette gir varmekapasiteten

$$C_p = P\frac{dt}{dT} = \frac{P}{\frac{dT}{dt}} = P\,\frac{1}{\dot{T}(t)}$$

Ved derivering finner en så

$$\dot{T}(t) = T_0\,\frac{a}{4\left[1 + a(t-t_0)\right]^{3/4}}$$

Med $T = T_0\left(1 + a(t-t_0)\right)^{1/4}$ kan t enkelt elimineres og en finner

$$\dot{T}(t) = T_0\,\frac{a}{4}\left(\frac{T_0}{T}\right)^3$$

eller

$$C_p = \frac{4P}{aT_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^3 \propto T^3$$

(Dette resultatet er typisk temperatur-avhengighet for faste stoffer ved lave temperaturer. Dette henger sammen med kvantiserte gittervibrasjoner (fononer). Ved noen få grader Kelvin vil ledningselektroner dominere for metaller slik at $C_p \propto T$.)