Løsning øving 5.

Oppgave 1

a) Avgitt varme fra omgivelsene (varmeplata)

$$Q = \int dQ = \int C_p \, dT = C_p (T_2 - T_1)$$

i) Entropiendringen til omgivelsene (0°C = 273K)

$$\Delta S_0 = -\frac{Q}{T_2} = -C_p \frac{T_2 - T_1}{T_2} = -4{,}184 \frac{kJ}{K} \frac{80}{373} = \underline{\underline{-0{,}90 \frac{kJ}{K}}}$$

ii) Entropiendringen til vannet

$$\Delta S_v = \int dS = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p \, dT}{T} = C_p \ln(T_2/T_1)$$

$$= 4{,}184 \, kJ/K \ln(373/293) = \underline{\underline{1{,}01 \, kJ/K}}$$

iii) Total entropiendring

$$\Delta S = \Delta S_0 + \Delta S_v = (-0{,}90 + 1{,}01) \, kJ/K = \underline{\underline{0{,}11 \, kJ/K}}$$

b) Avgitte varmemengder ved temperaturene $T_2 = 80°C$ og $T_3 = 50°C$ er henholdvis

$$Q_2 = C_p (T_2 - T_3) \quad \text{og} \quad Q_3 = C_p (T_3 - T_1).$$

Som under pkt. a) finner en nå tilsvarende

i) $$\Delta S_0 = -\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_3}{T_3} = -C_p \left[\frac{T_2 - T_3}{T_2} + \frac{T_3 - T_1}{T_3} \right]$$

$$= -4{,}184 \, kJ/K \left[\frac{50}{373} + \frac{30}{323} \right] = \underline{\underline{-0{,}95 \, kJ/K}}$$

ii) $$\Delta S_v = C_p \ln(T_2/T_1) = \underline{\underline{1{,}01 \, kJ/K}}$$

(som under pkt a, dvs. uendret)

iii) $$\Delta S = \Delta S_0 + \Delta S_v = (-0{,}95 + 1{,}01) \, kJ/K = \underline{\underline{60 \, J/K}}$$

c) Med varmeplater som er trinnvis varmere kan det hele tiden (tilnærmet) være temperatur-likevekt mellom varmeplata og vannet dersom oppvarmingen skjer tilstrekkelig langsomt. Dette blir da (tilnærmet) en reversibel prosess da den kan reverseres med at vannet kan avkjøles ved å føre varmen tilbake til varmeplatene siden det hele tiden er (tilnærmet) temperatur-likevekt mellom vannet og platene. Med slik likevekt vil da også entropiendring i vannet oppveies av tilsvarende endring i omgivelsene.
Så nå finner vi

i) $$\Delta S_0 = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p}{T} dT = -C_p \ln(T_2/T_1) = -\Delta S_v = \underline{\underline{-1{,}01 \, kJ/K}}$$

ii) $$\Delta S_v = \underline{\underline{1{,}01 \, kJ/K}}$$ (som tidligere)

iii) $$\Delta S = \Delta S_0 + \Delta S_v = \underline{\underline{0}}$$

Oppgave 2.

Siden det ikke blir tilført varme eller utført arbeid, vil den indre energi bli uendret ($Q = \Delta U + W$). Vi trenger da den indre energi som funksjon av T og V. Kan da benytte (som i øving 4)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p = \frac{RT}{V-b} - \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) = \frac{a}{V^2}$$

som integrert gir

$$U = f(T) - \frac{a}{V}$$

Integrasjonskonstanten $f(T)$ bestemmes ved at varmekapasiteten antas konstant $C_v = 12{,}6\ \mathrm{J/K}$ ($\approx \frac{3}{2}R$) slik at $f(T) = C_v T$ og dermed

$$U = C_v T - \frac{a}{V}$$

Uendret energi $U_1 = U_2$ gir dermed

$$C_v T_1 - \frac{a}{V_1} = C_v T_2 - \frac{a}{V_2}$$

Endringen i temperatur blir dermed

$$T_2 - T_1 = \frac{a}{C_v}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = \frac{0{,}136\ \mathrm{Nm^4}}{12{,}6\ \mathrm{J/K}}\ \frac{1}{10^{-3}\mathrm{m^2}}\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= \underline{\underline{-5{,}4\ \mathrm{K}}}$$

Oppgave 3.

For en reversibel prosess vil entropien være uendret. (Ellers vil den øke ved irreversible prosesser.) Varmemengdene Q_2 og Q_1 tilføres systemet ved temperaturene T_2 og T_1. Varmen Q_0 vil så avgis ved omgivelsenes temperatur T_0. Energibevarelse krever så at

$$Q_0 = Q_1 + Q_2$$

Uendret entropi innebærer da at ($\Delta S_i = -Q_i/T$ ($i=0,1,2$) for omgivelsene)

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_0}{T_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{T_0}$$

$$Q_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}\right) = Q_2\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2}\right)$$

$$Q_1\,\frac{T_0 - T_1}{T_1 T_0} = Q_2\,\frac{T_2 - T_0}{T_0 T_2}$$

Dette gir virkningsgraden (den maksimale)

$$\nu = \frac{Q_1}{Q_2} = \underline{\underline{\frac{T_1(T_2 - T_0)}{T_2(T_0 - T_1)}}}$$

Alternativt: Med Carnot-maskin mellom temperaturene T_2 og T_0 og kjølemaskin mellom temperaturene T_1 og T_0 finner en

$$\nu = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{W}{Q_2}\,\frac{Q_1}{W} = \frac{T_2 - T_0}{T_2}\ \frac{T_1}{T_0 - T_1} = \underline{\underline{\frac{T_1(T_2 - T_0)}{T_2(T_0 - T_1)}}}.$$