Termisk fysikk, 2006

Løsning øving 6.

Oppgave 1.

a) Som for porøs plugg kommer energien $H_1 = U_1 + p_1 V_1$ strømmende inn med gassen mens energien $H_2 = U_2 + p_2 V_2$ strømmer ut. I tillegg strømmer energien Φ inn i gassen mens den befinner seg i systemet og arbeidet W blir avlevert. Energibalansen blir følgelig

$$\underline{\underline{H_1 + \Phi = H_2 + W}}$$

b) For ideell gass er enthalpien (n mol)

$$H = n C_p T = \alpha n R T$$

Likningen funnet under pkt. a) gir da følgelig

$$\Phi - W = H_2 - H_1 = \underline{\underline{\alpha n R (T_2 - T_1)}}$$

c) De n mol med ideell gass har entropien S_1 før og entropien S_2 etter å ha gått gjennom systemet. Samtidig er entropi-mengden Φ/T_1 tatt fra omgivelsene. Siden total entropi ikke kan minke må vi da ha

$$S_2 \geq S_1 + \Phi_1/T_1$$

$$\Phi \leq T_1 (S_2 - S_1)$$

For ideell gass er ($pV = nRT$, $C_p = C_v + R = \alpha R$)

$$S = n C_v \ln T + nR \ln V = nR(\alpha \ln T - \ln p) + \text{konst}$$

$$\Phi \leq nRT_1 \left[\alpha \ln \frac{T_2}{T_1} - \ln \frac{p_2}{p_1}\right] = \underline{\underline{nRT_1 \ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\alpha} \frac{p_1}{p_2}\right]}}$$

d) Ved å sette inn resultatet for Φ fra pkt c) inn i uttrykket funnet under pkt. b) finner en når $W = 0$

$$\alpha n R (T_2 - T_1) \leq n R T_1 \ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\alpha} \frac{p_1}{p_2}\right]$$

$$\alpha\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) \leq \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\alpha} \frac{p_1}{p_2}$$

$$\exp\left[\alpha\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)\right] \leq \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\alpha} \frac{p_1}{p_2}$$

$$\underline{\underline{p_1 \geq p_2 \left[\frac{T_1}{T_2} \exp\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)\right]^{\alpha}}}$$

($> p_2$ når $T_2 = (1+x)T_1 \neq T_1$)

e) I systemet (maskineriet) kan gassen først ekspandere (evt. komprimeres) isotermt til et passende volum V_3 mens varmemengden Φ blir absorbert. Deretter blir gassen komprimert (evt. ekspandert) adiabatisk slik at trykk p_2 og temperatur T_2 blir resultatet. Arbeidet som kommer ut av dette, er det samme som differensen i arbeid $p_2 V_2 - p_1 V_1 = nR(T_2 - T_1)$ som kreves for strømning ut og inn av systemet. Dermed blir netto utført arbeid $W = 0$.

[La V_3 være volum etter den isoterme ekspansjonen. Isotermt arbeid blir da $W_i = \int p\,dV = nR \ln(V_3/V_1) = nR \ln(p_1/p_3) = nR \ln[(p_1/p_2)(T_1/T_2)^{\alpha}]$ når $p_1 V_1 = p_3 V_3$ ($T_3 = T_1$) og adiabatlikningen $p_3/T_1^{\alpha} = p_2/T_2^{\alpha}$ benyttes (fra $T_1 V_3^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ og $V = nRT/p$, $\alpha = \gamma/(\gamma-1)$). Adiabatisk arbeid blir ($\Phi = 0$) $W_a = -\Delta U = -C_v(T_2 - T_1) = -(\alpha - 1)nR(T_2 - T_1)$.
$W = 0$ betyr så $W_i + W_a = p_2 V_2 - p_1 V_1$.]

Oppgave 2.

Blandingsentropien er gitt ved
$\Delta S_{mix} = -k \sum_i N_i \ln x_i = -k(N_O \ln x_O + N_n \ln x_n)$.
der N_O og N_n er henholdsvis antall molekyl oksygen og nitrogen. De tilsvarende volum før blanding er henholdsvis V_O og V_n. For ideell gass har vi da

$$pV_O = N_O kT \quad , \quad pV_n = N_n kT \quad , \quad pV = NkT$$

der $V = V_O + V_n = 5\,dm^3$ og $N = N_O + N_n$.
Dette gir så

$$x_O = N_O/N = V_O/V = 0{,}2 \text{ og } x_n = N_n/N = V_n/V = 0{,}8.$$

slik at blandingsentropien blir $\left(kN_i = \frac{pV_i}{T} = \frac{pV}{T} x_i \; (i = O, n)\right)$

$$\Delta S_{mix} = -\frac{pV}{T}(x_O \ln x_O + x_n \ln x_n) =$$

$$-\frac{1{,}013 \cdot 10^5 N/m^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} m^3}{293\,K}(0{,}2 \ln 0{,}2 + 0{,}8 \ln 0{,}8) = \underline{\underline{0{,}865\,J/K}}$$

Ved blanding kan det tas ut et reversibelt arbeid $W = T_0 \Delta S_{mix} - \Delta U - p_0 \Delta V = T \Delta S_{mix}$ (exergi med $\Delta U = 0, \Delta V = 0$). Minste arbeid for å skille gassene er det samme slik at dette blir

$$W = T \Delta S_{mix} = 293 K \cdot 0{,}865\,J/K = \underline{\underline{253\,J}}$$

Avgitt varme kommer fra tilført varme.
Da $\Delta U = 0$ med $T =$ konst. for ideell gass blir dette $-Q = W = \underline{\underline{253\,J}}$

[W er det samme som arbeidet med å komprimere O_2 isotermt fra $5\,dm^3$ til $1\,dm^3$ og N_2 fra $5\,dm^3$ til $4\,dm^3$.]

Oppgave 3.

Den lineære utvidelseskoeffisienten er gitt ved

$$\alpha_L = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_p \approx \frac{1}{L}\left(\frac{\Delta L}{\Delta T}\right)_p$$

Endring av lengden blir følgelig

$$\Delta L = \alpha_L \Delta T \cdot L = 1{,}2 \cdot 10^{-5} K^{-1} (50-(-30))K \cdot 12\,m$$

$$= \underline{1{,}152 \cdot 10^{-2} m} = \underline{\underline{11{,}5\,mm}}$$

Youngs modulus er gitt ved

$$Y = \frac{F}{A} \frac{L}{\Delta L}$$

Lengdeendringen ΔL skal kompensere lengdeendringen fra temperaturendringen.
Endring av spenning blir følgelig

$$\sigma = \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L} = Y \alpha_L \Delta T =$$

$$20 \cdot 10^{10} Pa \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} K^{-1} \cdot 30 K = \underline{\underline{7{,}2 \cdot 10^7 Pa}} = \underline{\underline{710\,atm}}$$