

Løsning øving 8.

Oppgave 1.

a) Normaliseringskonstanten er gitt ved

$$1 = \sum_s p(s) = C \sum_{s=\pm 1} e^{\beta s h} = C(e^{\beta h} + e^{-\beta h}) = 2C \cosh(\beta h).$$

slik at partisyklusfunksjonen blir

$$Z = C^{-1} = \underline{2 \cosh \beta h}$$

Middlere magnetiske moment blir så

$$m = \langle s \rangle = \sum_{s=\pm 1} s p(s) = C(1 \cdot e^{\beta \cdot 1 \cdot h} + (-1) e^{\beta(-1)h}) = Z^{-1} \cdot 2 \sinh(\beta h) = \frac{\sinh(\beta h)}{\cosh(\beta h)} = \underline{\tanh(\beta h)}$$

[En har også: $m = \langle s \rangle = \frac{1}{Z} \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h} (\sum_{s=\pm 1} e^{\beta s h}) = \frac{1}{Z} \frac{1}{\beta} \frac{\partial Z}{\partial h}$
 $= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h} (\ln Z) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial h} (-\beta G) = -(\frac{\partial G}{\partial h})_T$, i samsvar med termodynamikkens $dg = -SdT - \mu_0 M dh = -SdT - mdh$.]

b) Med henholdsvis N_+ og N_- spinn med og mot magnetfeltet blir antall konfigurasjoner

$$W = \frac{N!}{N_+! N_-!} \quad \text{der } N = N_+ + N_-.$$

Videre med $N_m = N_+ - N_-$ følger så

$$N_+ = \frac{1}{2}(1+m)N \quad \text{og} \quad N_- = \frac{1}{2}(1-m)N$$

Entropien blir følgende

$$S = k \ln W = k(\ln N! - \ln N_+! - \ln N_-!) = N \ln N - N - (N_+ \ln N_+ - N_+) - (N_- \ln N_- - N_-) = -N_+ \ln \frac{N_+}{N} - N_- \ln \frac{N_-}{N} = N \left[-\frac{1}{2}(1+m) \ln \left(\frac{1}{2}(1+m) \right) - \frac{1}{2}(1-m) \ln \left(\frac{1}{2}(1-m) \right) \right] = \underline{\underline{N \left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m) \ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m) \ln(1-m) \right]}}.$$

c) Entropien $S = S(\beta, m)$ avhenger her kun av m . Når en først setter på magnetfelt h isotermt vil $m = \tanh(\beta h)$ øke. Når så magnetfeltet slås av igjen vil m være uendret slik at $m_2 = m_1$, eller

$$\tanh(\beta_2 h_2) = \tanh(\beta_1 h_1) \\ \beta_2 h_2 = \beta_1 h_1$$

slik at resulterende temperatur blir

$$T_2 = \frac{1}{k\beta_2} = \frac{1}{k\beta_1} \frac{h_2}{h_1} = \underline{\underline{T_1 \frac{h_2}{h_1}}}$$

Oppgave 2.

Føtongassen har indre energi $U = aVT^4$ og trykket er gitt ved $p = \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}U/V$. Den spesifikke varme blir så

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 4aVT^3 = 4 \frac{U}{T}$$

Følgelig finner en

$$\frac{pV}{T} = \frac{1}{3} \frac{U}{T} = \underline{\underline{\frac{1}{12} C_V}}$$

Dvs. $X = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$.

Oppgave 3.

(3)

a) Utstrålt effekt pr. m^2 fra sola

$$j_0 = \sigma T_0^4 = 5,67 \cdot 10^{-8} (5,785 \cdot 10^3)^4 \text{ W/m}^2 = \underline{6,35 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2}$$
$$= \underline{6,35 \text{ kW/cm}^2}$$

Utstrålt total effekt (A_0 er areal)

$$P_0 = j_0 A_0 = j_0 \pi d^2$$

Effekt pr. m^2 som entrer jordatmosfæren

$$j = \frac{P_0}{A} = j_0 \frac{A_0}{A} = j_0 \frac{\pi d^2}{4\pi R^2} = j_0 \left(\frac{d}{2R}\right)^2 =$$

$$6,35 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2 \cdot \left(\frac{1,392 \cdot 10^6}{2 \cdot 149,6 \cdot 10^6}\right)^2 = \underline{1375 \text{ W/m}^2}$$

b) Med radius r mottar jorda effekten $P = j \cdot \pi r^2$. (πr^2 er arealet som jorda dekker vertikalt stråle-retningen, dvs. arealet av sirkel.) Nå stråler hele arealet av jordoverflaten ut igjen. Dette arealet er (kuleflaten) $4\pi r^2$. Midlere utstrålt effekt er følgelig

$$j_u = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1}{4} j = \sigma T^4$$

Midlere temperatur blir dermed

$$T = \left(\frac{j}{4\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{1375}{4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}}\right)^{1/4} \text{ K} = \underline{279 \text{ K}} = \underline{6^\circ \text{C}}$$

$$\text{Evt. } T = \left(\frac{1}{4\sigma} j_0 \left(\frac{d}{2R}\right)^2\right)^{1/4} = T_0 \sqrt{\frac{d}{4R}} = 5785 \text{ K} \sqrt{\frac{1,392 \cdot 10^6}{4 \cdot 149,6 \cdot 10^6}} = \underline{279 \text{ K}}$$

Oppgave 4.

(4)

La T_{Cu} og T_{va} være starttemperaturene i henholdsvis i kopperet og vannet. Varmeenergien som avgis fra kopperet overføres til vannet. Energi balansen blir følgelig

$$M_{Cu} C_{Cu} (T_{Cu} - T) = M_{va} C_{va} (T - T_{va})$$

der M_{Cu} og M_{va} er massene til henholdsvis kopperet og vannet. Løst med hensyn på slutttemperaturen gir dette

$$T = \frac{M_{Cu} C_{Cu} T_{Cu} + M_{va} C_{va} T_{va}}{M_{Cu} C_{Cu} + M_{va} C_{va}} =$$

$$T_{va} + \frac{M_{Cu} C_{Cu} (T_{Cu} - T_{va})}{M_{Cu} C_{Cu} + M_{va} C_{va}} = 5^\circ \text{C} +$$

$$\frac{4,0 \cdot 0,387}{4,0 \cdot 0,387 + 1,5 \cdot 4,184} (50 - 5)^\circ \text{C} = \underline{13,9^\circ \text{C}}$$