Termisk fysikk, 2006.

①

Løsning øving 11.

Oppgave 1.

Maxwellfordelingen $g(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m v_x^2}{2kT}\right)$ er symmetrisk om $v_x = 0$. Derfor ser en umiddelbart at

$$\langle v_x\rangle = 0,\ \langle v_x^3\rangle = 0,\ \langle v_x^5\rangle = 0 \text{ og } \langle v_x v_y\rangle = \langle v_x\rangle\langle v_y\rangle = 0.$$

$\langle v_x v_y\rangle = \langle v_x\rangle\langle v_y\rangle$ følger av at v_x og v_y er uavhengig fordelt (dvs. $g(v_x, v_y) = g(v_x)g(v_y)$). Med $\alpha = \frac{m}{2kT}$ finner en videre

$$\langle v_x^2\rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x = -\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = -\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d}{d\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{2\alpha} = \frac{kT}{m}.$$

og

$$\langle v_x^4\rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\frac{d^2}{d\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^2}$$

$$= 3\left(\frac{kT}{m}\right)^2$$

Med $v_x^2 = A$ har en $\langle v_x^2\rangle = A$ og $\langle v_x^4\rangle = \langle A^2\rangle$. Vi skal vise at $\langle A^2\rangle \geq \langle A\rangle^2$. Dette gjøres ved å benytte ulikheten

$$0 \leq \langle (A - \langle A\rangle)^2\rangle = \langle A^2 - 2A\langle A\rangle + \langle A\rangle^2\rangle =$$

$$\langle A^2\rangle - 2\langle A\rangle\langle A\rangle + \langle A\rangle^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2.$$

Dvs.

$$\langle A^2\rangle \geq \langle A\rangle^2$$

og dermed

$$\langle v_x^4\rangle > \langle v_x^2\rangle$$

(Likhet gjelder bare dersom $A = \langle A\rangle$ er eneste tillatte verdi på A.)

②

Oppgave 2

For å bestemme molbrøken x_1 som funksjon av tiden beregner vi først partikkeltallene. Partikkelstrømtettheten er i forelesningene funnet til å være $j_x = \frac{1}{4} n \langle v\rangle$ der $n = N/V$ er partikkeltettheten og

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

De 2 komponentene kan betraktes hver for seg. Endring av partikkeltallet N_1 av komponent 1 inne i volumet V i løpet av tiden dt er

$$dN_1 = -j_x A\,dt = -\frac{1}{4}\frac{N_1}{V}\langle v_1\rangle A\,dt = -\alpha_1 N_1\,dt$$

der

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}\frac{A}{V}\langle v_1\rangle = \frac{A}{V}\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{m_1}}$$

Løsningen blir

$$\frac{dN_1}{N_1} = -\alpha_1\,dt$$

$$\ln N_1 = -\alpha_1 t + \text{konst}$$

$$N_1 = N_1(t) = N_{01} e^{-\alpha_1 t} \qquad (\text{da } N_1(0) = N_{01})$$

Tilsvarende finner en for komponent 2

$$N_2 = N_2(t) = N_{02} e^{-\alpha_2 t}$$

Molbrøken av komponent 1 inne i beholderen blir følgelig

$$x_1(t) = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{N_{01} e^{-\alpha_1 t}}{N_{01} e^{-\alpha_1 t} + N_{02} e^{-\alpha_2 t}} =$$

$$\frac{N_{01}/(N_{01}+N_{02})}{N_{01}/(N_{01}+N_{02}) + N_{02}/(N_{01}+N_{02})\cdot e^{-ct}} = \frac{x_1^0}{x_1^0 + (1 - x_1^0)e^{-ct}}$$

der
$$C = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{A}{V}\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{m_2}} - \frac{1}{\sqrt{m_1}}\right).$$

En ser at den tunge komponenten anrikes inne i beholderen siden det som strømmer ut har relativt mer av den lette komponenten. Forholdet her blir ($x_2 = 1 - x_1$)
$$\frac{\langle v_1\rangle N_1}{\langle v_2\rangle N_2} = \frac{\alpha_1 N_1}{\alpha_2 N_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Oppgave 3.

Så lenge bare en liten del av overflaten er dekket med oksygenatomer, kan en for enkelthets skyld anta at alle oksygenatomer treffer ren metallflate. Antall atomer som treffer arealet A i løpet av et tidsrom τ er da
$$N = j_x A \tau = \frac{1}{4} n \langle v\rangle A \tau$$

Med en diameter $d = 2{,}3\,\text{Å}$ vil en partiklene dekke arealet $\frac{1}{4}\pi d^2 N$. For å dekke 1/10 av arealet A blir tiden τ følgelig bestemt av
$$\frac{1}{10}A = \frac{1}{4}\pi d^2 \cdot \frac{1}{4} n \langle v\rangle A\tau$$
$$\tau = \frac{8}{5\pi d^2 n \langle v\rangle}.$$

Videre har en så
$$p = \frac{N}{V}kT = nkT$$
$$n = \frac{p}{kT}$$
og
$$v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Følgelig finner vi ved å sette inn
$$\tau = \frac{2}{5d^2 p}\sqrt{\frac{2}{\pi}mkT} = 6{,}7\,s \approx 7\,s$$
når
$m = 32 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg$, $d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}\,m$, $p = 10^{-7}\frac{1{,}013 \cdot 10^5}{760}\,Pa$, $T = 300\,K$ og $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,J/K$ settes inn.

Tida for å dekke et visst areal vil være omvendt proporsjonalt med trykket. Eksperiment i løpet av tiden $\tau_1 = 1\,\text{time} = 3600\,s$ innenfor gitt toleransegrense begrenser da trykket oppad til
$$p_1 = p\frac{\tau}{\tau_1} = 10^{-7} \cdot \frac{6{,}7}{3600}\,\text{torr} \approx 2 \cdot 10^{-10}\,\text{torr}$$

Dette er ultra høy-vakuum.