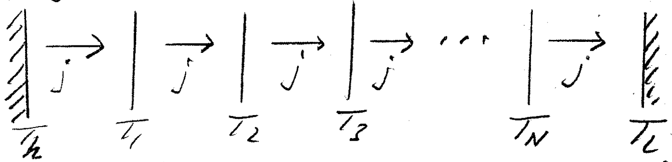
Termisk fysikk, 2006

Løsning øving 12.

Oppgave 1.



Ved stasjonære forhold er varmestrømmen j mellom skjoldene den samme overalt. Etter Stefan-Boltzmanns lov er netto varmestrøm pr. flateenhet

1. intervall: $j = \sigma(T_h^4 - T_1^4)$

2. — " — $j = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$

$\vdots$

N-te intervall: $j = \sigma(T_{N-1}^4 - T_N^4)$

Siste intervall: $j = \sigma(T_N^4 - T_L^4)$

De mellomliggende ukjente temperaturer kan nå elimineres ved å addere slik at vi finner

$$(N+1)\, j = \sigma(T_h^4 - T_L^4) = j_0$$

$$j/j_0 = \underline{\underline{\frac{1}{N+1}}}$$

der j_0 er varmestrømmen uten skjold. [Temperaturen på skjoldene kan bestemmes ved å addere de k første intervallene. Dette gir $k j = \sigma(T_h^4 - T_k^4)$ eller $T_k^4 = T_h^4 - \frac{1}{\sigma} k j$ som innsatt for j gir $T_k = \{[(N+1-k)T_h^4 + k T_L^4]/(N+1)\}^{1/4}$.]

Oppgave 2

For diffusjon av partikler fant vi at diffusjonslengden r går som kvadratroten av tiden t, dvs $r \sim \sqrt{t}$. Det samme må da gjelde for varmetransport som beskrives ved samme differensialligning. Når lengdedimensjoner endres med en faktor a, vil følgelig tidsforløp endres med en faktor a^2 for system av samme form. [Differensialligningen bli uendret dersom nye variable $t' = t/a^2$ og $r' = r/a$ innføres og samme grensebetingelser brukes.]

Når tyngden og dermed volumet til potetene endres med en faktor $v = 2$ vil lengder endres med en faktor

$$a = v^{1/3} = 2^{1/3}$$

Tiden endres derfor med faktoren

$$\tau = a^2 = 2^{2/3} = 1{,}59$$

Så med dobbelt så tunge poteter endres koketiden til

$$25\,\text{min} \cdot \tau \simeq \underline{\underline{40\ \text{min}}}$$

Oppgave 3.

Partikkelstrømtettheten er $j = \frac{1}{4} n \langle v \rangle \sim n \langle v \rangle$. Elektronstrømmen I ut fra en gitt flate er proporsjonal med j, dvs. $I \sim n \langle v \rangle$. For partikkelhastigheten har en $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$. Partikkeltettheten $n = N/V$ er bestemt av ligningen for ideell gass $p = nkT$ eller

$$n = \frac{p}{kT}$$

Følgelig finner en

$$I = \text{konst} \cdot \frac{p}{kT}\sqrt{T} = \underline{\underline{A T^2 \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right)}}$$

der A er en konstant.

Dette resultatet er Richardson – Dushmans likning for termionisk emisjon. Denne bestemmer metningsstrømmen eller maksimal strøm fra en metalloverflate (glødekatode). Elektroner som kommer ut danner en elektronsky av romladning som vil motvirke påtrykt elektrisk felt for å fjerne elektronene. Elektronstrømmen øker derfor gradvis etter hvert som det påtrykte elektriske feltet øker.

Oppgave 4.

a) Med kulesymmetri blir $\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r$. En finner så

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\sin kr}{r}(-Dk^2)e^{-Dk^2 t} = \underline{-Dk^2 T}$$

$$\nabla^2 T = a(-k^2)\frac{\sin kr}{r}e^{-Dk^2 t} = \underline{-k^2 T}$$

Følgelig er den gitte T løsning av $\frac{\partial T}{\partial t} = D\nabla^2 T$.

b) Grensebetingelsen $T = 0$ for $r = R$ innebærer at

$$\sin k_n R = 0$$

eller $k_n R = n\pi$

$$\underline{\underline{k_n = n\frac{\pi}{R}}} \quad \text{der } n \text{ er heltall.}$$

c) Ved å sette inn det gitte uttrykket for T i integralet for a_m finner en $(t = 0)$

$$a_m = \frac{2}{R}\sum_n a_n \int_0^R \frac{\sin k_n r}{r}\, r \sin(k_m r)\, dr = \frac{2}{R}\sum_n a_n \frac{1}{2} \times$$

$$\int_0^R \left\{\cos\left[(n-m)\frac{\pi}{R}r\right] - \cos\left[(n+m)\frac{\pi}{R}r\right]\right\} dr = \frac{2}{R}\sum_n a_n \frac{1}{2} R\, \delta_{nm} = \underline{\underline{a_m}}$$

som skulle vises. Har her brukt at

$$\int_0^R \cos\left(q\frac{\pi}{R}r\right) dr = \frac{R}{q\pi}\Big|_0^R \sin\left(q\frac{\pi}{R}\right) = 0, \quad \text{for } q \text{ heltall}, \ q \neq 0.$$

$$\int_0^R \cos(0)\, dr = \int_0^R dr = R.$$

Med den gitte grensebetingelsen blir koeffisientene

$$a_n = \frac{2}{R}T_0 \int_0^R r \sin k_n r\, dr = \frac{2}{R}T_0 \Big|_0^R \left(-\frac{r\cos k_n r}{k_n} + \frac{\sin k_n r}{k_n^2}\right)$$

$$= \frac{2}{R}T_0\left(\frac{-R\cos(n\pi)}{k_n} + 0\right) = \underline{\underline{\frac{2T_0}{k_n}(-1)^{n-1}}} = \underline{\underline{\frac{2RT_0}{n\pi}(-1)^{n-1}}}.$$

d) Siden $\lim_{r\to 0}\frac{\sin k_n r}{k_n r} = 1$ har en at

$$T(0,t) - T_\infty = \sum_n a_n k_n e^{-Dk_n^2 t} \xrightarrow[(t\to\infty)]{} a_1 k_1 e^{-Dk_1^2 t} = 2T_0 e^{-Dk_1^2 t}$$

Ved tiden $t = \tau$ har en så

$$T(0,\tau) - T_\infty = 2T_0 e^{-Dk_1^2\tau} = \frac{1}{10}T_0$$

Løst mhp. τ gir så dette

$$e^{-Dk_1^2\tau} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \quad (<<1)$$

$$\tau = \frac{-\ln 0{,}05}{Dk_1^2} = \frac{-\ln 0{,}05}{D}\left(\frac{R}{\pi}\right)^2 = \frac{-\ln 0{,}05}{0{,}0005\ \mathrm{m^2/h}}\left(\frac{0{,}05\ \mathrm{m}}{\pi}\right)^2 =$$

$$1{,}52\ \mathrm{h} \approx \underline{\underline{1\ \text{time}\ 31\ \text{min}}} = \underline{5460\ \mathrm{s}}.$$

[Kontroll av rekkeutvikling $\left(\alpha = \pi\frac{r}{R}\right.$, $\left.\ln(1+x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}(-1)^{n-1}x\right)$:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(n\alpha) = \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[(e^{i\alpha})^n - (e^{-i\alpha})^n\right] = \frac{1}{2i}\left[\ln(1+e^{i\alpha})\right.$$

$$\left.- \ln(1+e^{-i\alpha})\right] = \frac{1}{2i}\left[\ln(1+\cos\alpha + i\sin\alpha) - \ln(1+\cos\alpha - i\sin\alpha)\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{\ln\left[\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right] - \ln\left[\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\} = \frac{1}{2i}2i\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

fordi $\ln(re^{i\varphi}) = \ln[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \ln r + i\varphi$. Så alt i alt

$$T(r,0) - T_\infty = \frac{2RT_0}{r\pi}\frac{\alpha}{2} = \frac{2RT_0}{r\pi}\frac{1}{2}\pi\frac{r}{R} = \underline{T_0},$$ som vi skulle vise.]