NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET

INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Martin Grønsleth, tlf 93772

KONTINUASJONSEKSAMEN I TFY4210 ANVENDT KVANTEMEKANIKK

Fredag 13. august, 2004

09.00-14.00

Tillatte hjelpemidler	:	K.Rottman, Matematisk formelsamling
		Godkjent kalkulator
Vekttall	:	2.5
Språkform	:	Bokmål
Antall sider	:	9
Sensurdato	:	3.september

- Oppgave settet inneholder 3 oppgaver, med til sammen 13 deloppgaver. Hver deloppgave teller likt ved sensur.
- Bak oppgave settet finner du et vedlegg på to sider med formler som det kan, men ikke nødvendigvis vil, være bruk for. Kandidaten må tolke symbolene i oppgitte formler.
- Les hver oppgave nøye!

Oppgave 1

I denne oppgaven ser vi på fotoelektrisk effekt hvor et foton absorberes av et elektron med masse m i et hydrogen-likt atom med initial-tilstand $\psi_i(\mathbf{r})$, og elektronet slynges ut i en fri-partikkel slutt-tilstand $\psi_f(\mathbf{r})$. Overgangs-sannsynligheten for en slik prosess, $\omega_{i\to f}$, er gitt ved

$$\omega_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}\,\frac{Vmp_f}{h^3}\,|M|^2\,d\Omega$$

hvor $d\Omega$ er et romvinkel-element, V er et stort normeringsvolum, og p_f er impulsen til elektronet i slutt tilstanden

$$\psi_f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\,e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}$$

Videre er $\hbar = h/2\pi$ hvor h er Planck's konstant. Matrise-elementet M er gitt ved

$$\begin{aligned} M &= \int d^3\mathbf{r}\;\psi_f^*(\mathbf{r})\;V_-\;\psi_i(\mathbf{r}) \\ V_- &= \frac{e\hbar}{im}A_0\;\;e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\;\;\hat{e}_{\mathbf{k}}\cdot\nabla \end{aligned}$$

hvor A_0 er amplituden på strålingsfeltet, $\hat{e}_{\mathbf{k}}$ er en enhetsvektor som gir polarisasjons retningen til strålingsfeltet, og ∇ er en gradient operator. La initial-tilstanden være gitt ved $2s$ bølgefunksjonen til et hydrogen likt atom med kjerneladning Z

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left[1-\frac{Z\,r}{2a_0}\right]e^{-Zr/2a_0}$$

hvor

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

og ε_0 er permittivitetskonstanten i vakuum, $a_0 \approx 0.529$Å.

a) Vis at matrise-elementet M kan skrives på formen

$$M = K\,\frac{1-4a^2q^2}{(1+4a^2q^2)^2}\;\;\mathbf{q}\cdot\hat{e}_{\mathbf{k}}$$

der $a = a_0/Z$ og $\hbar\mathbf{q} = \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}$, der $\mathbf{p}$ er impulsen til utgående elektron og $\mathbf{k}$ er bølgetallet til innkommende strålingsfelt. Bestem derved konstanten K.

Oppgitt:

$$\int_0^\infty dx\;x\;(1-x)\;\sin(ux)\;e^{-x} = \frac{4u(-1+u^2)}{(1+u^2)^2}$$

b) Vinkelfrekvensen til innkommende bølge er gitt ved ω, og intensiteten i innkommende bølge er gitt ved $I = 2\varepsilon_0\ \omega^2\ c\ A_0^2$. Definer størrelsen $j_{\text{inn}} = I/\hbar\omega$ og beregn derved det differensielle spredningstverrsnittet

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{j_{\text{inn}}} \frac{\omega_{i\to f}}{d\Omega}$$

c) Finn Z- og ω avhengigheten til det differensielle spredningstverrsnittet i høyenergetisk ikke-relativistisk grense (dvs. at elektronet sin bindingsenergi er mye mindre enn øvrige energier involvert, og alle hastigheter er langt mindre enn lyshastigheten c). Gi en kort kvalitativ forklaring på spredningstverrsnittet sin variasjon med Z.

Oppgave 2

I denne oppgaven ser vi på en relativistisk spinnløs boson-partikkel beskrevet av den stasjonære Klein-Gordon ligningen

$$\left[c^2(\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2+(mc^2)^2\right]\psi=E^2\psi$$

Her er c lyshastigheten, q er partikkelens ladning, og m er partikkelens masse. E er energien til partikkelen. Impulsoperatoren $\mathbf{p}$ er gitt ved

$$\mathbf{p}=\frac{\hbar}{i}\nabla$$

der $\hbar=h/2\pi$ og h er Plancks konstant. *Partikkelens bevegelse er to-dimensjonal*, dvs. den beveger seg i (x,y)-planet i et konstant ytre magnetfelt $\mathbf{B}$ som står loddrett på (x,y)-planet, og der $\mathbf{B}$ er gitt ved

$$\mathbf{B}=B\hat{z}$$

som vi assosierer med et vektor-potensial gitt ved

$$\mathbf{A}=Bx\hat{y}$$

a) Bruk en Ansatz for bølgefunksjonen for partikkelen på formen

$$\psi(x,y)=e^{ip_y y/\hbar}\ f(x)$$

til å vise at Klein-Gordon ligningen kan skrives på formen

$$-\hbar^2c^2\frac{d^2f}{dx^2}+c^2(Bqx-p_y)^2f=a(E)f$$

og bestem derved $a(E)$.

b) Bruk Schrødinger ligningen for den endimensjonale harmoniske oscillatoren

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{1}{2}\ m\ \omega^2\ x^2\ \psi=\frac{\hbar\omega}{2}(2n+1)\ \psi;\quad n=0,1,2,...$$

til å bestemme de mulige egenverdiene E i Klein-Gordon ligningen over. Dersom spekteret hadde vært oppgitt for en tilsvarende situasjon for en Dirac partikkel, hvordan kunne da resultatet du har funnet over ha vært skrevet opp uten videre?

c) Finn et uttrykk for energi-nivåene til partikkelen i ikke-relativistisk grense.

d) Finn et uttrykk for den minste energien et foton må ha i dette systemet for å produsere et partikkel-antipartikkel par.

e) Beregn numerisk hvor stort feltet B må være for at denne minste foton energien skal økes med 0.0001% i forhold til null-felt tilfellet, for det tilfellet at Klein-Gordon partikkelen er et kaon K^+ med assosiert antipartikkel $\bar{K}^-$, med ladning q lik elektronets ladning og hvileenergi $494MeV$.

Oppgave 3

Et kvantemekanisk system av spinnløse fermioner på et tre-dimensjonalt kubisk gitter, i kontakt med et eksternt partikkel reservoar, er definert ved Hamiltonoperatoren

$$H = W \sum_{<i,j>} c_i^\dagger c_j + V \sum_{<i,j>} n_i \, n_j - \mu \sum_i n_i$$

Her er $(c_i^\dagger, c_i)$ kreasjons- og destruksjonsoperatorer for spinnløse fermioner på gitterpunkt i, og $n_i = c_i^\dagger c_i$. Operatorene tilfredsstiller fermion anti-kommutator relasjoner

$$\begin{aligned} c_i c_j^\dagger + c_j^\dagger c_i &= \delta_{ij} \\ c_i c_j + c_j c_i &= 0 \\ c_i^\dagger c_j^\dagger + c_j^\dagger c_i^\dagger &= 0 \end{aligned}$$

Videre er W et tunnelerings matrise-element som vi regner som positivt, V er en *nærmeste-nabo* elektrostatisk vekselvirkning mellom fermioner på det to-dimensjonale kvadratiske gitteret, og μ er et kjemisk potensial som regulerer midlere antall partikler på gitteret. Systemet har føringsbetingelsen at det ikke kan befinne seg mer enn ett fermion på hvert gitterpunkt. Systemet over kan transformeres til en Heisenberg modell for en magnetisk isolator ved å innføre spinn-operatorer for $S = 1/2$ spinn som følger

$$\begin{aligned} c_i^\dagger &= S_i^{(+)} \\ c_i &= S_i^{(-)} \\ n_i &= \frac{1}{2} + S_{iz} \\ S_i^{(\pm)} &= S_x \pm i S_y \end{aligned}$$

Her er z en spinn-kvantiserings retning perpendikulært på det to-dimensjonale gitteret som vi legger i (x, y)-planet. S_{ix}, S_{iy}, S_{iz} er x, y, z-komponenter av $S = 1/2$ spinn operatorer.

a) Finn kommutator-relasjonene til spinn-operatorene $S_{iz}, S_i^{(\pm)}$ ved å bruke antikommutator-relasjonen for fermion operatorene.

b) Vi at H kan skrives som en anisotrop Heisenberg modell i ytre magnetfelt, på formen

$$H = E_0 - J \sum_{<i,j>} \left[S_{iz} \, S_{jz} + \Delta \; S_i^{(+)} \; S_i^{(-)} \right] - h \sum_i S_{iz}$$

og bestem ved dette parametrene E_0, J, Δ, h ved hjelp av parametrene W, V, μ og Z, N, hvor Z er antallet nærmeste naboer på gitteret, og N er totalt antall gitterpunkt i systemet.

c) Bestem de verdiene på V som gir ferromagnetisk kobling i modellen, og de verdiene som gir antiferromagnetisk kobling i modellen. Hva svarer en maksimal spinnpolarisering i z-retning til i fermion systemet?

d) Bosoniser dette systemet ved å innføre Holstein-Primakoff transformasjonen

$$\begin{aligned} S_{iz} &= S - a_i^{\dagger} a_i \\ S_i^{(+)} &= \sqrt{2S} \left(1 - \frac{a_i^{\dagger} a_i}{2S}\right)^{1/2} a_i \\ S_i^{(-)} &= \sqrt{2S}\ a_i^{\dagger} \left(1 - \frac{a_i^{\dagger} a_i}{2S}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

hvor $a_i^{\dagger}, a_i$ er kreasjons- og destruksjons operatorer for kvantiserte spinn-bølger (magnoner). Regn til laveste orden i magnon-operatorene og finn energien ω_q til magnonene, definert ved

$$H = H_0 + \sum_q \omega_q a_q^{\dagger} a_q$$

der

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q a_q\ e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r_i}}$$

hvor $\mathbf{r_i}$ er posisjonen til en partikkel på gitterpunkt nummer i.

e) Parameteren V er en effektiv parameter i modellen som beskriver vekselvirkning mellom fermioner på nærmeste nabo gitter punkt. Anta at vi kan endre fortegnet på V fra en negativ verdi til en positiv verdi, ved å endre litt på de mikroskopiske egenskapene til systemet som modellen vår beskriver. Forklar hva du forventer at skjer med lavtemperatur forløpet til varmekapasiteten til systemet når V skifter fortegn. (Hint: For små bølgetall har magnonene i en antiferromagnet en energi gitt ved $\hbar\omega_q$, der $\omega_q \sim |q|$.)

OPPGITTE FORMLER OG KONSTANTER

$$\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \delta_{\mathbf{k},0}$$

$$\int d^3r \; e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \; F(r) = \frac{4\pi}{q}\int_0^\infty dr \; r \; \sin(q\; r) \; F(r)$$

Kommutator-relasjoner for boson operatorer

$$[a_\lambda, a_\lambda^\dagger] = \delta_{\lambda,\lambda}$$

hvor λ representerer et sett med kvantetall.

Elektronets masse og ladning

$$\begin{aligned} m_e &= 9.1 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg} \\ e &= 1.6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \end{aligned}$$

Plancks konstant

$$h = 6.62 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}$$

Permittivitetskonstanten i vakuum

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{12}\mathrm{C}^2/\mathrm{Nm}^2$$

Lyshastigheten

$$c = 3.0 \cdot 10^{8}\mathrm{m/s}$$

$$\begin{aligned} 1\mathrm{eV} &= 1.602 \cdot 10^{-19}\mathrm{J} \\ 1\mathrm{MeV} &= 10^{6}\mathrm{eV} \end{aligned}$$

Dirac ligningen (beskriver $S = 1/2$ partikler) for en partikkel med ladning q i et elektromagnetisk felt

$$[E - q\phi]\,\psi = \left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + \beta mc^2\right]\psi$$

Pauli matrisene $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1\;\hat{x} + \sigma_2\;\hat{y} + \sigma_3\;\hat{z}$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dirac matrisene

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \beta = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}; \qquad \beta^2 = 1; \qquad \alpha_i^2 = 1$$

Spinn-bane identitet

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 &= \boldsymbol{\pi}^2 - q\,\hbar\,\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} \\ \boldsymbol{\pi} &= \mathbf{p} - q\mathbf{A} \\ \boldsymbol{\Sigma} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Indre energi U til et boson system med Hamilton operator gitt ved

$$H = H_0 + \sum_q \omega_q a_q^\dagger a_q$$

er gitt ved

$$U = \sum_q \frac{\hbar\omega_q}{e^{\beta\omega_q} - 1}$$

der $\beta = 1/k_B T$, k_B er Boltzmann's konstant, og T er temperatur. Den tilhørende varmekapasiteten er gitt ved

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T}$$