NTNU
Institutt for fysikk

TFY4210 Anvendt kvantemekanikk
Øving 1 våren 2006

Oppgave 1. Planbølgeløsninger til Dirac-ligningen med bestemt helisitet
I forelesningene ble det nevnt at egenverdien til helisitetsoperatoren

$$\Sigma_{\hat{p}} = \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{p}} & 0 \\ 0 & \sigma_{\hat{p}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

kan brukes som et ekstra kvantetall som skiller mellom de to degenererte planbølgeløsningene til Dirac-ligningen (ved gitt $\boldsymbol{p}$ og $E/|E|$), men at de 4-komponent spinorene $u^{(\ell)}(\boldsymbol{p})$ som ble skrevet ned ikke hadde veldefinert helisitet (unntatt når $\boldsymbol{p}$ peker i z-retningen).

a) Bruk kulekoordinater,

$$\boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|\,(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) \equiv p\,\hat{p},$$

(der $p \equiv |\boldsymbol{p}|$) og finn egenverdiene r, og eksplisitte uttrykk for de tilhørende 2-komponent egenspinorene $\chi^{(r)}(\boldsymbol{p})$, til egenverdiproblemet

$$\sigma_{\hat{p}}\,\chi^{(r)}(\hat{p}) = r\,\chi^{(r)}(\hat{p}). \tag{2}$$

b) For gitt bevegelsesmengde $\boldsymbol{p}$ skal 4-komponent spinorene $u^{(\ell)}(\boldsymbol{p})$ løse egenverdiligningen

$$\begin{pmatrix} mc^2 & c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -mc^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{p}) \\ u_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} u_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{p}) \\ u_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

der $u_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{p})$ og $u_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p})$ er 2-komponent spinorer. Bruk *ansatzen*

$$u_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{p}) = \mathcal{A}\,\chi^{(r)}(\hat{p}), \quad u_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p}) = \mathcal{B}\,\chi^{(r)}(\hat{p}),$$

der $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ avhenger av p, til å løse egenverdiproblemet (3). Bruk samme normeringsbetingelse som i forelesningene, og vis at løsninger med forskjellige verdier for r og/eller $E/|E|$ er ortogonale på hverandre.

c) Skriv ned de fire uavhengige planbølgeløsningene til Dirac-ligningen med bestemt helisitet.

Oppgave 2. Fullstendig utledning av Thomas–Darwin leddet
I forelesningen utledet vi Thomas–Darwin leddet under antagelse om at både skalarpotensialet φ og vektorpotensialet $\boldsymbol{A}$ var uavhengig av tiden. Dette ble utilfredsstillende fordi vi ikke fikk kontrollert at uttrykket var helt i overensstemmelse med uttrykket for det elektriske felt, $\boldsymbol{E} = -\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\right)$. For en fullstendig utledning må vi gå til de tidsavhengige ligningene, dvs. gjøre substitusjonen $E \to \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}$. Vis at

$$\left[c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\varphi\right) - \left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\varphi\right)c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}\right]\Psi(\boldsymbol{r},t) = -\mathrm{i}q\hbar c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}\,\Psi(\boldsymbol{r},t), \tag{4}$$

der $\boldsymbol{\pi} = -\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}$.