TFY4210 Anvendt kvantemekanikk
Løsning øving 1 våren 2006

NTNU
Institutt for fysikk

Oppgave 1. Planbølgeløsninger til Dirac-ligningen med bestemt helisitet

I forelesningene ble det nevnt at egenverdien til helisitetsoperatoren

$$\Sigma_{\hat{p}} = \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{\hat{p}} & 0 \\ 0 & \sigma_{\hat{p}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

kan brukes som et ekstra kvantetall som skiller mellom de to degenererte planbølgeløsningene til Dirac-ligningen (ved gitt $\boldsymbol{p}$ og $E/|E|$), men at de 4-komponent spinorene $u^{(\ell)}(\boldsymbol{p})$ som ble skrevet ned ikke hadde veldefinert helisitet (unntatt når $\boldsymbol{p}$ peker i z-retningen).

a) Bruk kulekoordinater,

$$\boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|\,(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta) \equiv p\,\hat{p},$$

(der $p \equiv |\boldsymbol{p}|$) og finn egenverdiene r, og eksplisitte uttrykk for de tilhørende 2-komponent egenspinorene $\chi^{(r)}(\boldsymbol{p})$, til egenverdiproblemet

$$\sigma_{\hat{p}}\,\chi^{(r)}(\hat{p}) = r\,\chi^{(r)}(\hat{p}). \tag{2}$$

Siden $\sigma_{\hat{p}}^2 = \hat{p}_j\hat{p}_k\sigma_j\sigma_k = \hat{p}_j\hat{p}_k\,(\delta_{jk} + \mathrm{i}\varepsilon_{jk\ell}\sigma_\ell) = \hat{p}\cdot\hat{p} = 1$ må egenverdiene være $r = \pm 1$. Med standardrepresentasjonen for Pauli-matrisene, $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, blir egenverdiligningen eksplisitt utskrevet

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta - r & \sin\vartheta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ \sin\vartheta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & -\cos\vartheta - r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_1^{(r)} \\ \chi_2^{(r)} \end{pmatrix} = 0$$

Ved bruk av $\cos\vartheta + 1 = 2\cos^2\vartheta/2$, $\cos\vartheta - 1 = -2\sin^2\vartheta/2$, $\sin\vartheta = 2\sin\vartheta/2\cos\vartheta/2$, kan dette omskrives

$$\begin{pmatrix} -\sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ \sin\frac{\vartheta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & -\cos\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_1^{(+)} \\ \chi_2^{(+)} \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} & \sin\frac{\vartheta}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ \cos\frac{\vartheta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & \sin\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_1^{(-)} \\ \chi_2^{(-)} \end{pmatrix} = 0,$$

med normerte løsninger

$$\chi^{(+)}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \\ \sin\frac{\vartheta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \end{pmatrix}, \qquad \chi^{(-)}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\vartheta}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \\ \cos\frac{\vartheta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

b) For gitt bevegelsesmengde $\boldsymbol{p}$ skal 4-komponent spinorene $u^{(\ell)}(\boldsymbol{p})$ løse egenverdiligningen

$$\begin{pmatrix} mc^2 & c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{p}) \\ u_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{p}) \\ u_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

der $u_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{p})$ og $u_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p})$ er 2-komponent spinorer. Bruk *ansatzen*

$$u_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{p}) = \mathcal{A}\,\chi^{(r)}(\hat{p}), \quad u_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{p}) = \mathcal{B}\,\chi^{(r)}(\hat{p}),$$

der $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ avhenger av p, til å løse egenverdiproblemet (4). Bruk samme normeringsbetingelse som i forelesningene, og vis at løsninger med forskjellige verdier for r og/eller $E/|E|$ er ortogonale på hverandre.

Vi setter inn den foreslåtte ansatzen og bruker at $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\,\chi^{(r)}(\hat{p}) = rp\,\chi^{(r)}(\hat{p})$. Dette gir

$$\begin{pmatrix} mc^2 & rp \\ rp & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} \chi^{(r)}(\hat{p}) = E \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} \chi^{(r)}(\hat{p}),$$

dvs.

$$\begin{pmatrix} mc^2 - E & rpc \\ rpc & -mc^2 - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

Betingelsen for ikketriviell løsning blir $E = \pm\sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$, med tilhørende løsninger

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{rpc}{E+mc^2} \end{pmatrix} \text{ for } E > 0, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} -\frac{rpc}{|E|+mc^2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ for } E < 0,$$

der N er en normaliseringskonstant som bestemmes til $\sqrt{\frac{|E|+mc^2}{2|E|}}$. Vi ser at disse to løsningene er ortogonale på hverandre når r er den samme. Løsninger med forskjellige verdier av r er ortogonale fordi $\chi^{(r)}(\hat{p})^\dagger \chi^{(s)}(\hat{p}) = \delta_{rs}$.

c) Skriv ned de fire uavhengige planbølgeløsningene til Dirac-ligningen med bestemt helisitet.

Vi kan eliminere p ved bruk av ligningen $pc = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2}$. Planbølgeløsningene kan da skrives

$$\psi^{(\ell)}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - Et)/\hbar}\, u^{(\ell)}(\boldsymbol{p}), \tag{6}$$

med

$$u^{(1)}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}}\,\chi^{(+)}(\hat{p}) \\ \sqrt{\frac{E-mc^2}{2E}}\,\chi^{(+)}(\hat{p}) \end{pmatrix} \quad u^{(2)}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+mc^2}{2E}}\,\chi^{(-)}(\hat{p}) \\ -\sqrt{\frac{E-mc^2}{2E}}\,\chi^{(-)}(\hat{p}) \end{pmatrix} \quad (E > 0),$$

$$u^{(3)}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{|E|-mc^2}{2|E|}}\,\chi^{(+)}(\hat{p}) \\ \sqrt{\frac{|E|+mc^2}{2|E|}}\,\chi^{(+)}(\hat{p}) \end{pmatrix} \quad u^{(4)}(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{|E|-mc^2}{2|E|}}\,\chi^{(-)}(\hat{p}) \\ \sqrt{\frac{|E|+mc^2}{2|E|}}\,\chi^{(-)}(\hat{p}) \end{pmatrix} \quad (E < 0).$$

Kommentar: For anvendelser i partikkelfysikk er det idag mer vanlig å bruke enheter der $\hbar = c = 1$ (for enklere formler), normering slik at $u^{(\ell)}(\boldsymbol{p})^\dagger u^{(\ell')}(\boldsymbol{p}) = 2E\,\delta_{\ell\ell'}$ (for enklere Lorentztransformasjoner), og erstatte negativ energi spinorene med $v^{(1)}(\boldsymbol{p}) \equiv u^{(3)}(-\boldsymbol{p})$, $v^{(2)}(\boldsymbol{p}) \equiv u^{(4)}(-\boldsymbol{p})$ (av grunner som kan forstås fra hullteori). Merk at $\chi^{(r)}(-\hat{p}) = \chi^{(-r)}(\hat{p})$ modulo en fase. Fourierutviklingen av det annenkvantiserte Diracfeltet blir da

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\ell=1}^{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2E}}\left[c_\ell(\boldsymbol{p})\,u^{(\ell)}(\boldsymbol{p})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})} + d_\ell^\dagger(\boldsymbol{p})\,v^{(\ell)}(\boldsymbol{p})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}\right], \tag{7}$$

der $E = +\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2}$, og kreasjons- og annihilasjonsoperatorene er normert slik at

$$\left\{c_\ell(\boldsymbol{p}), c_{\ell'}^\dagger(\boldsymbol{p}')\right\} = \delta_{\ell\ell'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'), \quad \left\{d_\ell(\boldsymbol{p}), d_{\ell'}^\dagger(\boldsymbol{p}')\right\} = \delta_{\ell\ell'}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}').$$

Oppgave 2. Fullstendig utledning av Thomas–Darwin leddet

I forelesningen utledet vi Thomas–Darwin leddet under antagelse om at både skalarpotensialet φ og vektorpotensialet $\boldsymbol{A}$ var uavhengig av tiden. Dette ble utilfredsstillende fordi vi ikke fikk kontrollert at uttrykket var helt i overensstemmelse med uttrykket for det elektriske felt, $\boldsymbol{E} = -\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\right)$. For en fullstendig utledning må vi gå til de tidsavhengige ligningene, dvs. gjøre substitusjonen $E \to \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}$. Vis at

$$\left[c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\varphi\right) - \left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\varphi\right)c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}\right]\Psi(\boldsymbol{r},t) = -\mathrm{i}q\hbar c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}\,\Psi(\boldsymbol{r},t), \tag{8}$$

der $\boldsymbol{\pi} = -\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{\nabla} - q\boldsymbol{A}$.

Ha i mente at operatorer som $\boldsymbol{\alpha}$, β (som virker på spinorindekser) alltid kommuterer med operatorer som $\boldsymbol{\pi}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ og φ (som virker på rom-tids koordinater). Matematisk sett virker disse to kategoriene operatorer på forskjellige (uavhengige) faktorer av et produktrom. Når vi skriver ut venstresiden av (8) får vi

$$\begin{aligned}
&\Bigg[\hbar^2 c\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\right) - \mathrm{i}\hbar cq\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\right) \\
&+\mathrm{i}\hbar cq\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r},t) - \varphi(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{\nabla}\right) + cq^2\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\varphi(\boldsymbol{r},t) - \varphi(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\right)\Bigg]\Psi(\boldsymbol{r},t) \\
&= \mathrm{i}\hbar cq\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right)\Psi(\boldsymbol{r},t) = -\mathrm{i}\hbar cq\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\,\Psi(\boldsymbol{r},t).
\end{aligned}$$

Merk at differensialoperatorene her skal forstås forskjellig: I de to første linjene virker de på alle faktorer til høyre for seg, og produktregelen må anvendes. I siste linje virker de bare på faktoren rett til høyre (alle ledd som involverer deriverte av $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ kansellerer).