Løsningsforslag, Øving 3
Anvendt Kvantemekanikk

Oppgave 1

$$(E-q\varphi)^2\psi=\left[c^2(\vec{p}-q\vec{A})^2+(mc^2)^2-c^2q\hbar\vec{\Sigma}\cdot\vec{B}\right.$$
$$\left.+ic\hbar q\,\vec{\alpha}\cdot\vec{E}\right]\psi$$

$$q\varphi = 0$$
$$\vec{E} = \vec{0}$$

$$E^2\psi=\left[c^2(\vec{p}-q\vec{A})^2+(mc^2)^2-c^2q\hbar\,\vec{\Sigma}\cdot\vec{B}\right]\psi$$

$$\vec{\Sigma}=\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & -\vec{\sigma}\end{pmatrix}$$

$\vec{\sigma}$: Vektor av Pauli-matriser.
Poenget med $\vec{B}=B\hat{z}$, er at vi kan bryte denne spinor-ligningen ned i 4 (parvis redundante) Klein-Gordon ligninger for det samme problemet, og som vi allerede har løst.

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_a\\ \psi_b\end{pmatrix}$$: 4-komponent spinor.

ψ_a, ψ_b: 2-komponent spinor.

$$E^2\psi_a=\left[c^2(\vec{p}-q\vec{A})^2+(mc^2)^2-c^2q\hbar\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right]\psi_a$$
$$E^2\psi_b=\left[c^2(\vec{p}-q\vec{A})^2+(mc^2)^2+c^2q\hbar\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right]\psi_b$$

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}$$

$$\psi_a = \begin{pmatrix} \psi_{a1} \\ \psi_{a2} \end{pmatrix}$$

$$\psi_b = \begin{pmatrix} \psi_{b1} \\ \psi_{b2} \end{pmatrix}$$

$$E^2 \psi_{a1} = \left[c^2 (\vec{p} - q\vec{A})^2 + (mc^2)^2 - c^2 q\hbar B\right] \psi_{a1}$$

$$E^2 \psi_{a2} = \left[c^2 (\vec{p} - q\vec{A})^2 + (mc^2)^2 + c^2 q\hbar B\right] \psi_{a2}$$

$$E^2 \psi_{b1} = \left[c^2 (\vec{p} - q\vec{A})^2 + (mc^2)^2 + c^2 q\hbar B\right] \psi_{b1}$$

$$E^2 \psi_{b2} = \left[c^2 (\vec{p} - q\vec{A})^2 + (mc^2)^2 - c q\hbar B\right] \psi_{b2}$$

Ligning for ψ_{a1} er identisk med den for ψ_{b2}, og den for ψ_{a2} er identisk med ψ_{b1}. Hver av disse er som KG-ligning vi har løst før, med hvileenergi-ledd

$$(mc^2)^2_{\pm} = (mc^2)^2 \pm c^2 q\hbar B$$

$$E_\sigma = \pm\sqrt{(mc^2)^2 + (cp_z)^2 + \sigma q\hbar c^2 B + \hbar|qB|(2n+1)}$$

Igjen, spekteret er fri-partikkel i z-retning, relativistiske Landau-nivåer, og relativistiske Zeeman-splitting.

Oppgave 2.

Fra forelesningen har vi:

$$w_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{V m p_f}{h^3} \left(\frac{e \hbar A_0}{m\sqrt{V}}\right)^2 (\vec{e}_k \cdot \vec{q})^2 \, |\tilde{\psi}_i(\vec{q})|^2 \cdot d\Omega$$

$$\underbrace{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_i = \left(\frac{w_{i\to f}}{I/\hbar\omega}\right) \cdot \frac{1}{d\Omega}}$$

$$I = 2\,\varepsilon_0\,\omega^2\,c\,A_0^2$$

$$w_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{m p}{h^3} \frac{e^2 \hbar^2 A_0^2}{m^2 \hbar^2} (\vec{e}_k \cdot \vec{p})^2 \, |\tilde{\psi}_i(\vec{q})|^2 \cdot d\Omega$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{m p^3}{8\pi^3 \hbar^3} \frac{e^2 A_0^2}{m^2} (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_p)^2 \, |\tilde{\psi}_i(\vec{q})|^2 \cdot d\Omega$$

$$= \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{m p^3}{\hbar^4 m^2} \frac{I}{2\varepsilon_0 \omega^2 c} (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_p)^2 \, |\tilde{\psi}_i(\vec{q})|^2 \, d\Omega$$

$$= \frac{I}{\hbar\omega} \cdot d\Omega \; \frac{e^2 \cdot p^3}{8\pi^2 \varepsilon_0 m \omega c \hbar^3} (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_p)^2 \, |\tilde{\psi}_i(\vec{q})|^2$$

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_i = \frac{e^2 p^3 \, (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_p)^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 m \omega c \hbar^3} |\tilde{\psi}_i(\vec{q})|^2}$$

Dette er generell formel for diff. spredn. tverrsnitt for foto-elektrisk effekt i halv-klassisk strålingsteori, når et elektron er i vilkårlig initialtilstand $\psi_i(\vec{r})$.

Vi husker fra forelesning

$$|\tilde{\psi}_{1s}(\vec{q})|^2 = \frac{64\pi a^3}{(1+q^2a^2)^4}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{1s} = \frac{8e^2p^3a^3}{\pi\varepsilon_0 m\omega c\hbar^3}\cdot\frac{(\vec{e}_k\cdot\vec{e}_p)^2}{(1+q^2a^2)^4}$$

b) Se nå på 2s-tilstand

$$\tilde{\psi}_i(\vec{q}) = \int d^3r\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{(2-\frac{r}{a})}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-\frac{r}{2a}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2\pi}{\sqrt{\pi a^3}}\int_0^\infty dr\, r^2\left(2-\frac{r}{a}\right)e^{-\frac{r}{2a}}\frac{2\sin(qr)}{qr}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}}\frac{\pi}{q}\int_0^\infty dr\, r\left(1-\frac{r}{2a}\right)e^{-\frac{r}{2a}}\sin(qr)$$

Innfør $x = \frac{r}{2a}$

$$r = 2ax$$

$$\tilde{\psi}_i(\vec{q}) = \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}}\frac{4a^2\pi}{q}\underbrace{\int_0^\infty dx\, x(1-x)\sin(2aqx)e^{-x}}_{I(2aq)}$$

Dette integralet beregnes lett med Maple eller Mathematica, men la oss se på en analytisk beregning likevel

$I_1 = \int_0^\infty dx\, x \sin(2qax)\, e^{-x}$ (5)

$I_2 = \int_0^\infty dx\, x^2 \sin(2qax)\, e^{-x}$

$$I = I_1 - I_2$$

Define: $I_{0c} = \int_0^\infty dx \cos(2aqx)\, e^{-x}$

$$I_{0s} = \int_0^\infty dx \sin(2aqx)\, e^{-x}$$

$$I_0 = \int_0^\infty dx\, e^{-x(1\mp 2iaq)}$$

$$= \frac{1}{1\mp 2iaq}$$

$$= \frac{1+i2aq}{1+(2aq)^2}$$

$$I_{0c} = \frac{1}{1+(2aq)^2}$$

$$I_{0s} = \frac{2aq}{1+(2aq)^2}$$

$$I_1 = -\frac{\partial}{\partial(2qa)} I_{0c} = \frac{aq\cdot 4}{\left(1+(2aq)^2\right)^2}$$

$$I_2 = -\frac{\partial^2}{\partial(2qa)^2} I_{0s} = \frac{-\partial}{\partial(2qa)}\left(\frac{1}{1+(2qa)^2} - \frac{2(2aq)^2}{\left(1+(2qa)^2\right)^2}\right)$$

$$= \frac{-\partial}{\partial(2qa)} \frac{1-(2aq)^2}{\left(1+(2qa)^2\right)^2}$$

$$I_2 = \frac{8qa}{\left(1+(2qa)^2\right)^3} + \frac{4qa}{\left(1+(2qa)^2\right)^2} - \frac{4(2aq)^3}{\left(1+(2qa)^2\right)^3}$$

$$I_1 - I_2 = \frac{8aq - 4(2aq)^3}{\left[1+(2aq)^2\right]^3}$$

$$= \frac{8aq\left(1 - \cancel{4}\,(2aq)^2\right)}{\left[1+(2aq)^2\right]^3}$$

$$|\tilde{\psi}_{2s}(q)|^2 = 16\,(2aq)^2 \, \frac{\left(1-(2aq)^2\right)^2}{\left[1+(2aq)^2\right]^6} \, \frac{2}{\pi a^3} \, \frac{16a^4\pi^2}{q^2}$$

$$= 2048\,\pi a^3 \, \frac{(1-y^2)^2}{(1+y^2)^6} \; ; \; y = 2aq$$

som innsatt i $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{2s}$ gir

ønsket svar.